GIORNATA INTERNAZIONALE DELLA MATEMATICA 14 MARZO

Poliedri artistici

Partecipanti:

dai 14 anni in su, a seconda dell'attività.

Non sono richieste conoscenze matematiche pregresse, ma man mano che si procede con le attività, potrebbe essere necessario applicare concetti matematici come poligoni, poligoni regolari e poliedri, nonché utilizzare nozioni di base come la somma degli angoli di un triangolo, la sezione aurea, costruzioni geometriche di base o coordinate cartesiane.

Materiali:

Per i modelli fisici si utilizzano spiedini di legno ed elastici. Se desiderato, gli spiedini possono essere colorati con la vernice. In alcune costruzioni, può essere utile realizzare poliedri con lo spago per evitare di ingombrare con gli spiedini. È anche possibile costruire poliedri con cartoncino colorato.

Alcune immagini possono essere proiettate in classe dall'insegnante. Inoltre, alcune attività includono link ad animazioni e app interattive online.

1.Poliedri regolari.

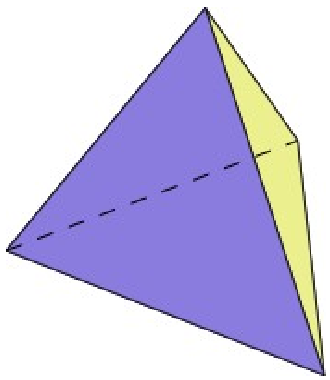
Cos'è un *poliedro* ?

- È un solido tridimensionale delimitato da facce piane. Le *facce* sono poligoni piani.
- I segmenti di linea in cui due facce si incontrano sono chiamati *spigoli* .
- I punti in cui si incontrano tre o più facce sono chiamati *vertici* .

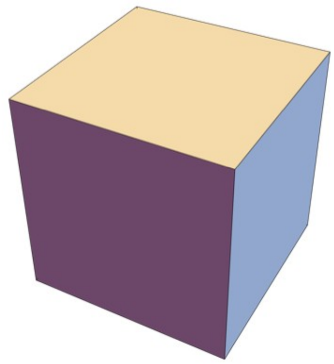
Cos'è un poliedro regolare?

- Le facce sono poligoni regolari identici. (Un poligono è *regolare* se tutti i suoi lati hanno la stessa lunghezza e tutti i suoi angoli sono uguali)
- ogni vertice è adiacente allo stesso numero di facce.
- il poliedro è *convesso* .

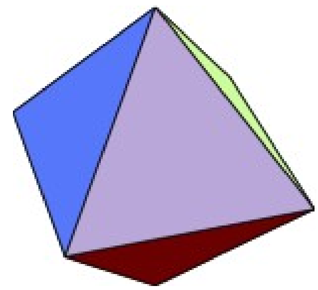
I cinque poliedri regolari:



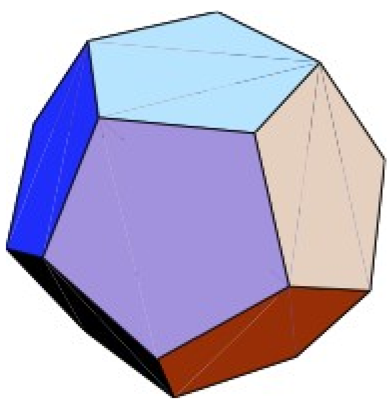
tetraedro



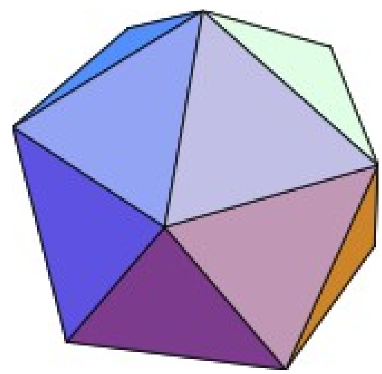
cubo



ottaedro



dodecaedro

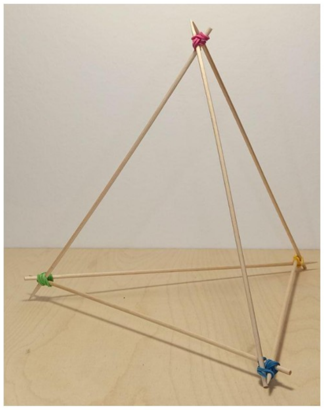
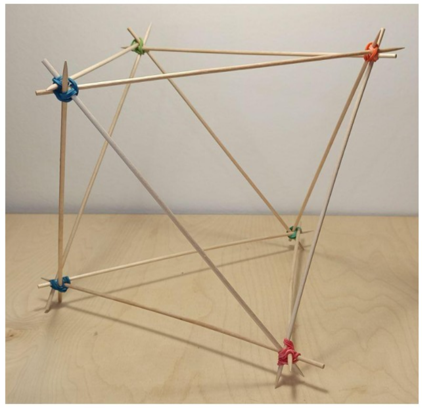
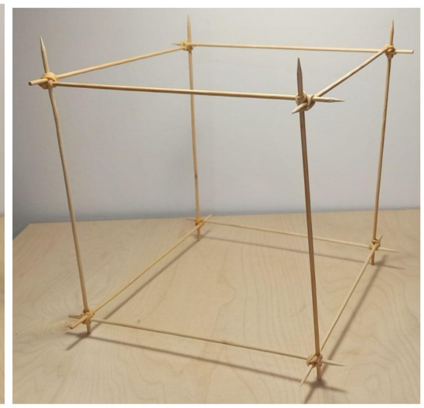
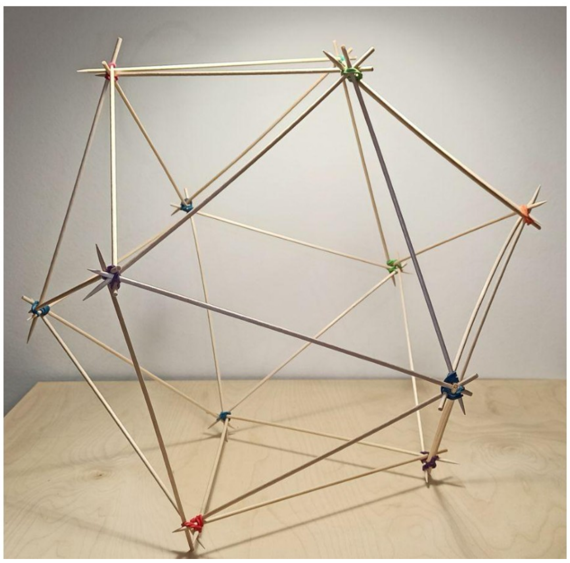
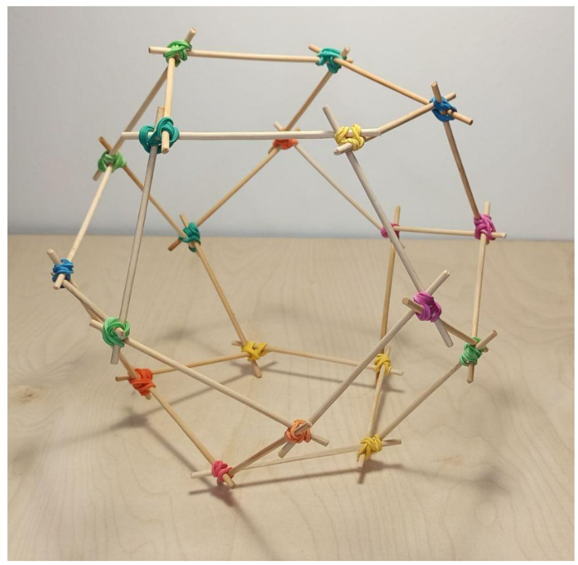


icosaedro

Questi sono gli unici cinque poliedri regolari, noti anche come solidi platonici. (cliccare sui link per manipolare i poliedri)

Dalle immagini e dal numero e tipo di facce, deduci il numero di spigoli e vertici (quanti spiedini ed elastici ti serviranno) e costruisci i cinque poliedri regolari.

Poliedro regolare	Tipo di viso	Numero di facce	Numero di vertici	Numero di spigoli
Icosaedro	triangolo	20	12	30
Ottaedro	triangolo	8	6	12
Tetraedro	triangolo	4	4	6
Cubo	piazza	6	8	12
Dodecaedro	Pentagono	12	20	30

Osserva la relazione di Eulero:

$$F + V = E + 2$$

dove F, V ed E sono rispettivamente il numero di facce, vertici e spigoli.

Inoltre, osserva che esiste una stretta relazione tra:

- L'ottaedro e il cubo.
- L'icosaedro e il dodecaedro.
- Il tetraedro e se stesso.

(Confronta il numero di vertici, spigoli e facce.)

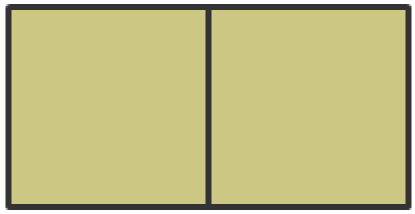
Due poliedri sono chiamati *duali* se: i vertici di uno corrispondono alle facce dell'altro e viceversa. Si possono ottenere posizionando i vertici di uno al centro delle facce dell'altro. Gli spigoli corrispondono biunivocamente, ma sono ruotati di 90° nel poliedro duale.

Ci sono solo cinque poliedri regolari

Dimostriamo che ci sono solo cinque poliedri regolari. Puoi usare carta o cartone e nastro adesivo per costruire le figure nell'argomentazione.

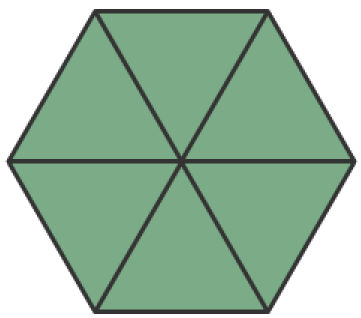
Sappiamo che in un poliedro regolare tutte le facce sono poligoni regolari uguali. Sia *n* il numero di facce che si incontrano in un vertice.

Passo 1: Se *n* = 2, spiega perché non è possibile costruire alcun tipo di poliedro.



Passo 2: Sappiamo già che *n*>*2*. Proviamo a costruire tutti i possibili poliedri regolari, iniziando con i triangoli equilateri.

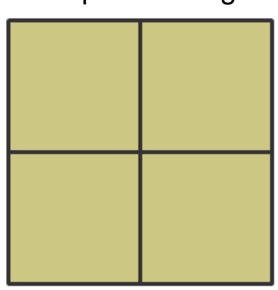
- Se *n* = 3, è possibile costruire un poliedro regolare? Se possibile, costruiscilo unendo 3 triangoli in ogni vertice.
- Se *n* = 4, è possibile costruire un poliedro regolare? Se possibile, costruiscilo unendo 4 triangoli in ogni vertice.
- Se *n* = 5, è possibile costruire un poliedro regolare? Se possibile, costruiscilo unendo 5 triangoli in ogni vertice.
- Se *n* = 6, non è possibile costruire un poliedro regolare. Perché no?



- Se *n* = 6, non è possibile costruire un poliedro regolare. Perché no?

Passo 3. Passiamo ai quadrati.

- Se *n* = 3, è possibile costruire un poliedro regolare? Se possibile, costruiscilo unendo 3 quadrati in ogni vertice.
- Se *n* = 4, non è possibile costruire un poliedro regolare. Perché no?



- Se *n* = 4, non è possibile costruire un poliedro regolare. Perché no?

Passo 4. Passiamo ai pentagoni regolari.

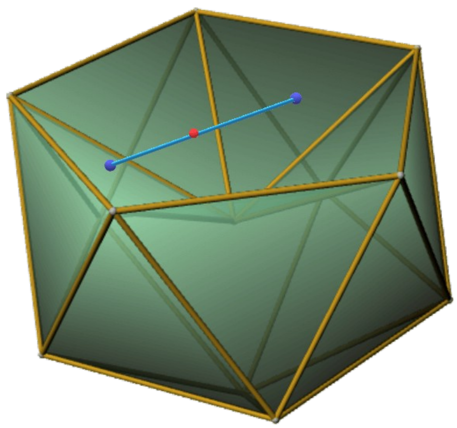
- Se n = 3, è possibile costruire un poliedro regolare? Se possibile, costruiscilo unendo 3 pentagoni in ogni vertice.
- Se n = 4, non è possibile costruire un poliedro regolare. Perché no?

Passo 5. Infine, utilizziamo gli esagoni. Spiega perché non sarebbe possibile costruire un poliedro regolare utilizzando esagoni regolari.

Spiega perché non sarebbe possibile costruire un poliedro regolare utilizzando ettagoni regolari (7 lati), ottagoni regolari (8 lati), ecc.

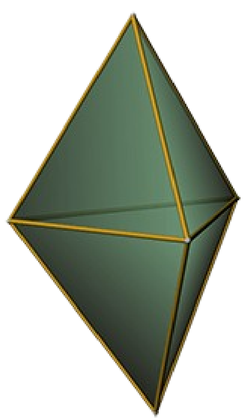
Poliedri non regolari

Un poliedro è convesso se, per ogni coppia di punti sulle facce, il segmento che congiunge i punti è interamente contenuto nel poliedro.



Esempio di un poliedro non convesso (per manipolare il poliedro clicca qui)

In un poliedro regolare tutti i vertici sono identici (hanno lo stesso numero di facce coincidenti).



Un esempio di poliedro con tutte le sue facce poligoni regolari, ma non un poliedro regolare (in alcuni vertici coincidono tre facce e in altri quattro). (per manipolare il poliedro clicca qui).

La definizione di poliedri regolari proibisce questi casi.

- Puoi giocare su questa app [Mathina] per distinguere tra poliedri convessi e non convessi .
  Con questa app [GitHub IMMAGINARIO] puoi troncare, stellare e apportare altre modifiche ai poliedri per ottenere nuovi solidi.

relazione di Eulero

Abbiamo già osservato una relazione tra il numero di facce, spigoli e vertici nei solidi platonici. Questa relazione si applica a molti altri poliedri non regolari:

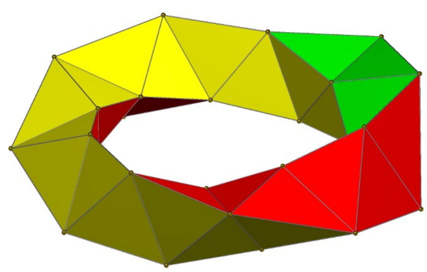
Relazione di Eulero . Per ogni poliedro equivalente alla sfera, vale la seguente relazione

$$V - E + F = 2 ,$$

dove è il numero di vertici, è il numero di spigoli e è il numero di facce.

Più in generale, la caratteristica di Eulero, indicata con la lettera greca χ , è definita come $\chi = V - E + F$.

Il teorema afferma che $\chi = 2$ per la maggior parte dei poliedri che si possono immaginare. Le eccezioni, ovvero i poliedri non equivalenti a una sfera, includono, ad esempio, un toro poliedrico o i poliedri di Kepler-Poinsot (quando si pensa che abbiano facce intersecanti) perché avvolgono la sfera più di una volta. Tutti i poliedri convessi hanno $\chi = 2$.

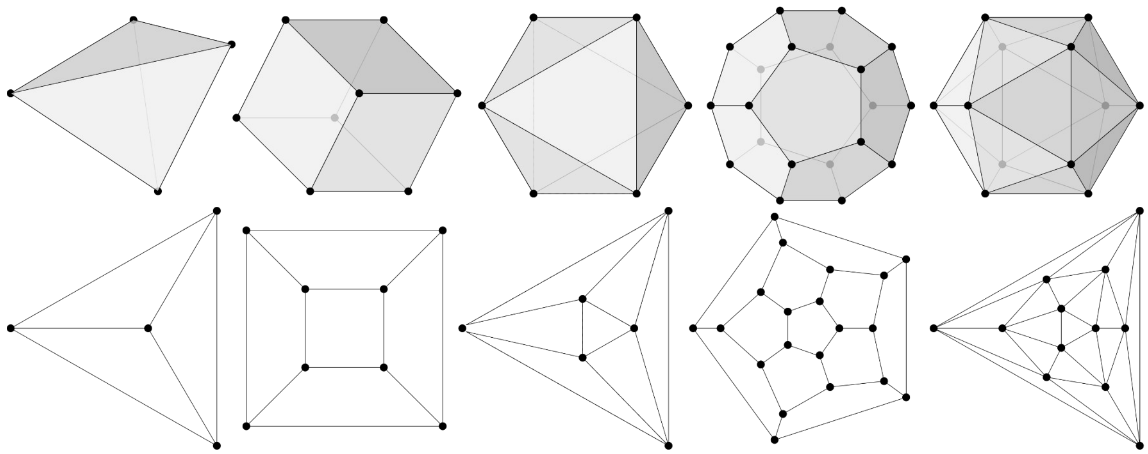


Un poliedro non regolare e non convesso con la forma di un toro, con $\chi = 0$.

Dimostriamo la relazione di Eulero.

Passo 1. Poiché la relazione non coinvolge angoli, lunghezze o altre misure metriche, possiamo deformare lo scheletro (ovvero gli spigoli e i vertici) come un grafo flessibile e appiattirlo su un piano. Dimostra che è possibile disegnare lo scheletro di un poliedro convesso su un piano piano, senza che gli spigoli si intersechino, ottenendo un grafo *planare* . Un grafo è detto *planare* quando i suoi spigoli non si intersecano (si toccano solo nei loro estremi, che sono i vertici).

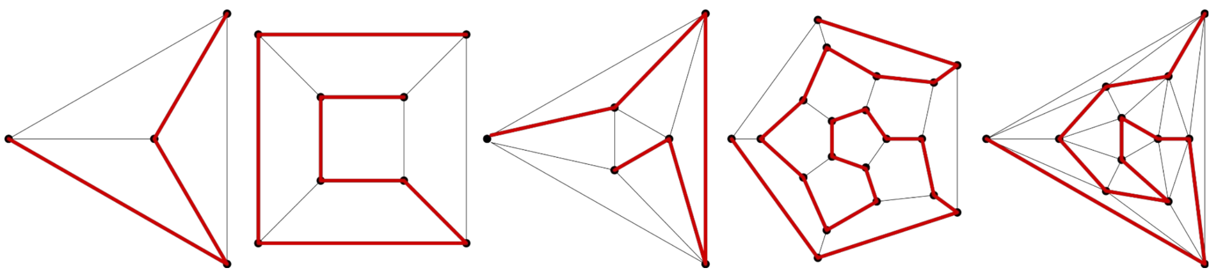
Ad esempio, possiamo farlo con i solidi platonici:



Si noti che ogni grafo ha lo stesso numero di vertici, spigoli e facce del poliedro originale. Le "facce" sono le regioni chiuse, insieme alla regione esterna illimitata.

Possiamo quindi dimostrare la relazione di Eulero per i grafi planari.

Passo 2. Dimostrare che su ogni grafo planare, possiamo trovare un percorso che collega tutti i vertici V , utilizzando $V - 1$ bordi.



Passo 3. Supponiamo di rimuovere tutti gli spigoli tranne quelli sul cammino che collega i vertici. Dimostra che per questo grafo abbiamo $\chi = 2$.

Passo 4. Riaggiungi uno alla volta gli spigoli rimossi nel passaggio precedente. Dimostra che aggiungendo ogni spigolo, la caratteristica di Eulero rimane $\chi = 2$, finché non si recupera il grafico del poliedro originale.

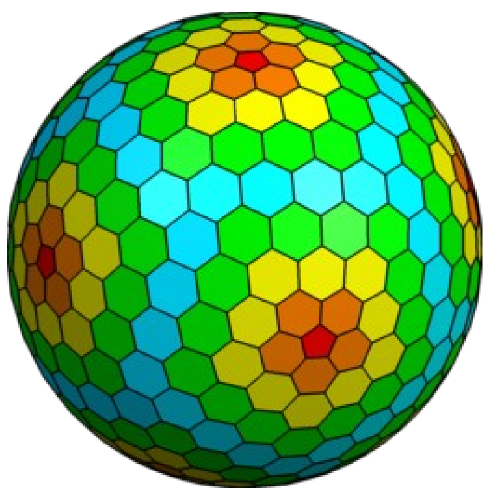
Sfide extra

- Forme con pentagoni ed esagoni sono state utilizzate per la progettazione architettonica, ad esempio la *Biosfera di Montreal* progettata da Buckminster Fuller nel 1967. Nella biosfera di Montreal, le facce sono triangoli assemblati in gruppi di 5 o 6 per ogni vertice. Utilizzando la formula di Eulero, dimostra che (se la sfera fosse completa) ci sarebbero sempre esattamente dodici vertici collegati a cinque triangoli.

La biosfera di Montreal
Immagine: Cédric THÉVENET, tramite Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

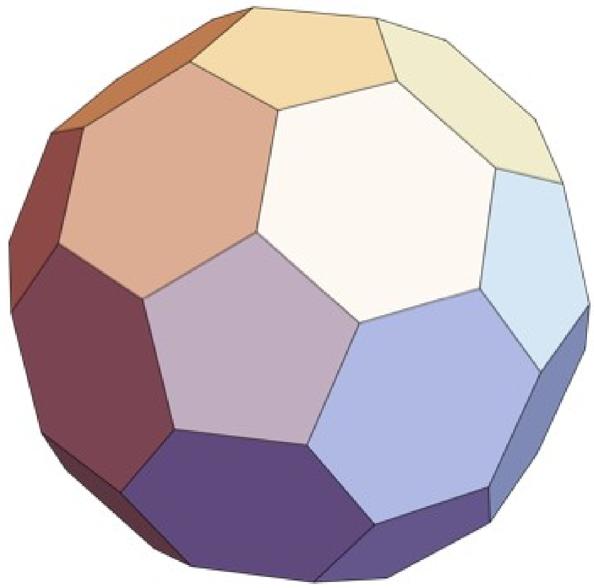
- *I poliedri di Goldberg* sono poliedri le cui facce sono tutte pentagoni ed esagoni e hanno le stesse simmetrie dell'icosaedro. Usando la formula di Eulero, dimostra che qualsiasi poliedro le cui facce sono pentagoni ed esagoni ha esattamente dodici pentagoni.

  (Si noti che l'icosaedro ha esattamente 12 vertici e a ciascun vertice sono collegati cinque triangoli.)



Un poliedro di Goldberg
Immagine: Tomruen, tramite Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

Un altro poliedro di Goldberg è l'icosaedro troncato, il pallone da calcio che conosciamo bene.



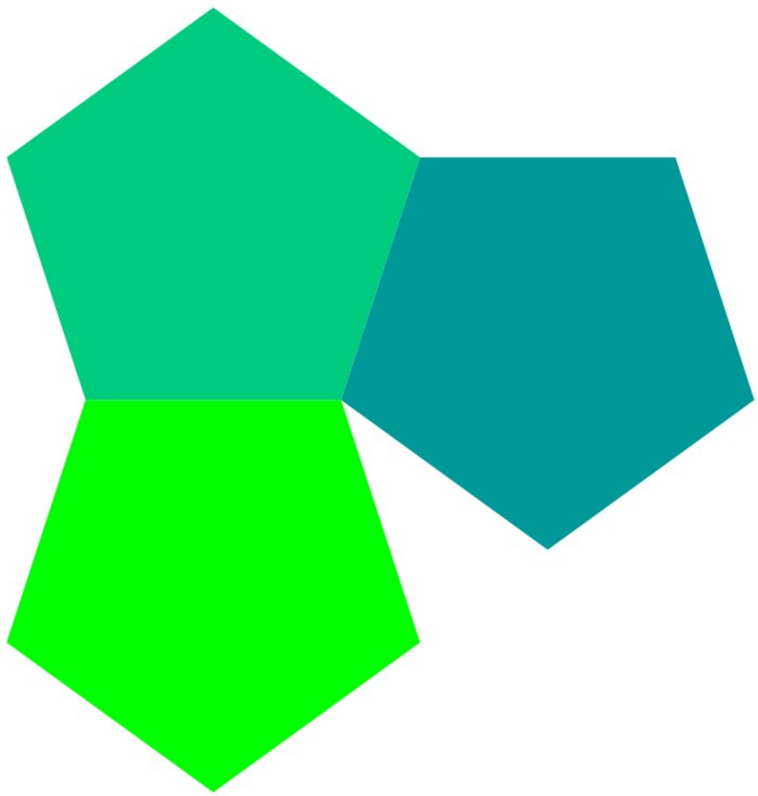
L'icosaedro troncato

Teorema di Cartesio

Quando si costruisce un poliedro, si assemblano le facce in corrispondenza di ogni vertice. È possibile contare la somma degli angoli delle facce adiacenti a un vertice. Questa somma è

- minore di 360° se il poliedro è convesso vicino a quel vertice;
- uguale a 360° se il poliedro è piatto vicino a quel vertice;
- maggiore di 360° se il poliedro è concavo vicino a quel vertice.

La differenza tra 360º e la somma degli angoli in un vertice è chiamata *difetto in quel vertice.* (Si noti che il difetto è negativo nel terzo caso.)



Il difetto su un vertice di un dodecaedro è 360º 3x108º = 36º.

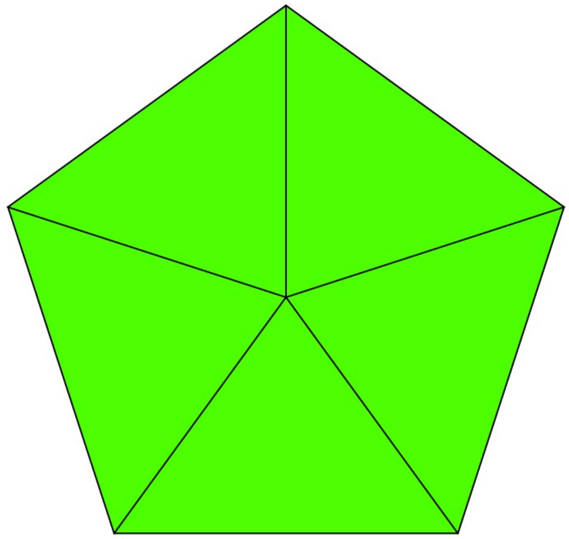
Teorema di Cartesio: per un poliedro, la somma dei difetti in ogni vertice, detta anche *difetto totale* , è uguale a 720º.

a) Verificare il teorema di Cartesio sui poliedri regolari o su altri poliedri, come l' icosaedro troncato.

b) Dimostrare il teorema di Cartesio utilizzando la formula di Eulero:

i) Per prima cosa, è possibile ridurre il problema a quello di un poliedro con facce triangolari.

Per fare ciò, è sufficiente prendere un punto interno a ciascuna faccia poligonale e unirlo a tutti i vertici della faccia, dividendo così la faccia in triangoli.



Se una faccia ha *n* spigoli, il processo aggiunge un vertice (il punto interno), *n* spigoli che uniscono il punto interno ai vertici e una faccia viene sostituita da *n* facce triangolari. Pertanto, la formula di Eulero (*V* + *F* = *E* + 2) rimane valida.

ii) Dimostrare il teorema di Cartesio per un poliedro con facce triangolari. Sia *D* la somma dei difetti, *V* il numero di vertici, *E* il numero di spigoli e *F* il numero di facce. Quindi:

$$E = 3/2\ F.$$

poiché ogni faccia ha tre spigoli e ogni spigolo viene contato due volte.

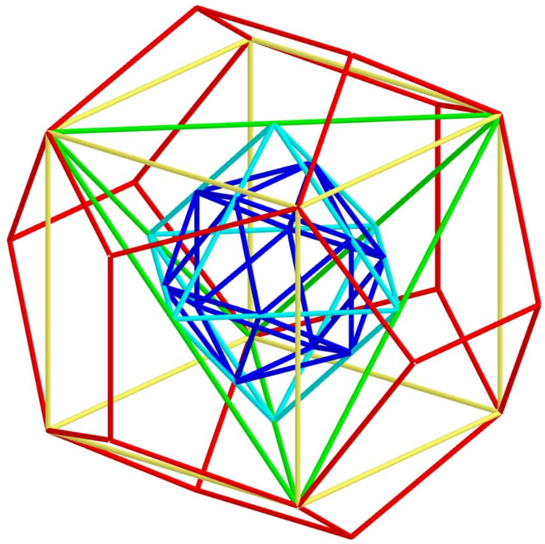
$$D = 360º\ V\ 180º\ F.$$

Pertanto,

$$D = 180º(2\ VF\ ) = 180º(2\ V + 2\ F\ 3\ F\ ) = 360º(\ V + F\ 3/2\ F\ )$$
$$= 360º(\ V + FE\ ) = 360º \times 2 = 720º.$$

Costruire l'omnipoliedro

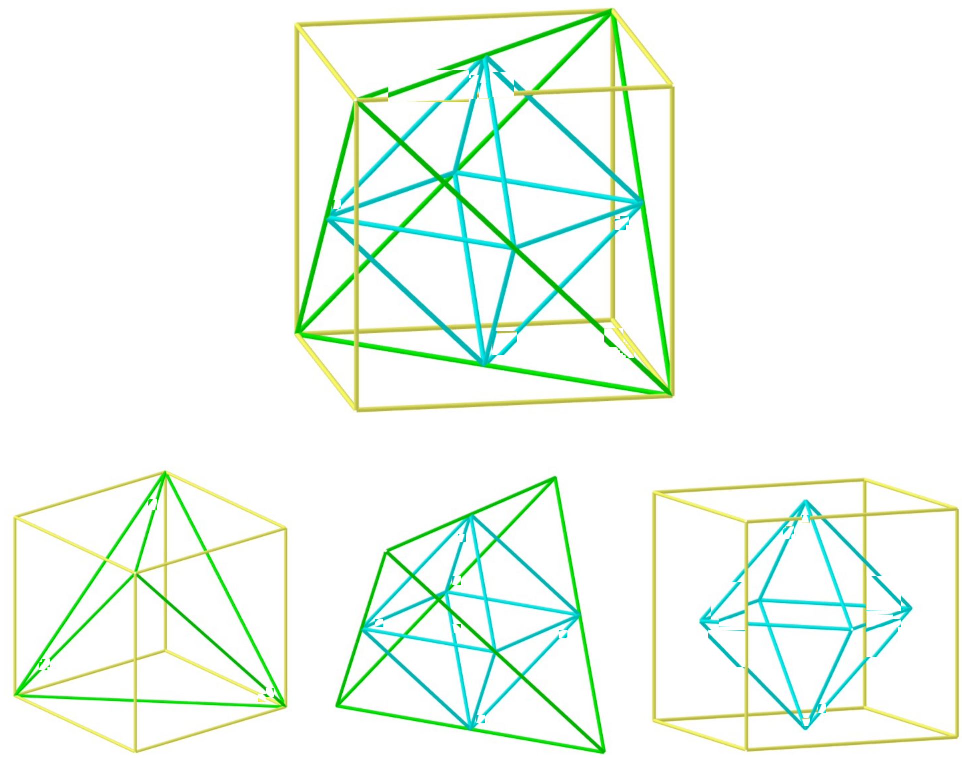
Una disposizione di cinque poliedri regolari inscritti l'uno nell'altro che mostra alcune delle loro relazioni e proprietà è talvolta chiamata *omnipoliedro* (non è un singolo poliedro, ma una disposizione di poliedri).



Proponiamo tre costruzioni parziali di poliedri inscritti. È possibile realizzarne una qualsiasi, oppure combinarle per costruire un omnipoliedro. È possibile utilizzare spiedini di legno ed elastici. L'icosaedro può anche essere realizzato con uno spago una volta costruito l'ottaedro.

Il cubo, il tetraedro e l'ottaedro.

Costruisci un cubo. Aggiungi una diagonale su ciascuna delle sei facce, costruendo un tetraedro: a tal fine, devi scegliere diagonali i cui estremi siano tutti su quattro vertici del cubo, e tre diagonali sono attaccate a ciascuno di questi quattro vertici (ci sono due modi per farlo). Unisci i punti medi degli spigoli del tetraedro, costruendo un ottaedro.

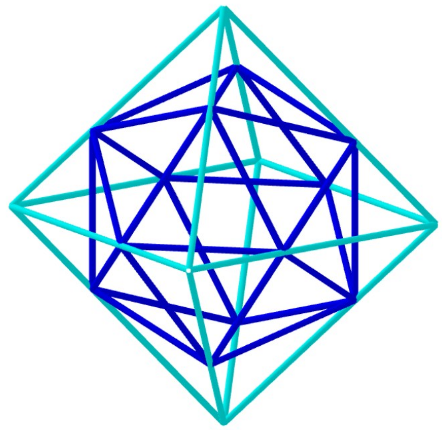


Disegna questa costruzione su un foglio di carta, costruiscila con dei bastoncini e dimostra matematicamente che funziona. Calcola le lunghezze degli spigoli del tetraedro e dell'ottaedro.

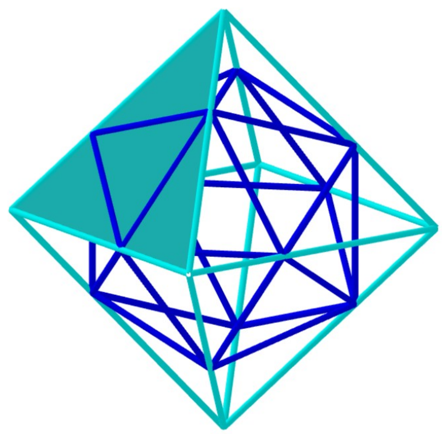
Si noti che gli spigoli dell'ottaedro sono al centro delle facce del cubo, quindi possiamo vedere che l'ottaedro è il duale del cubo. Si ottiene il tetraedro duale se si scelgono le altre diagonali delle facce del cubo.

L'icosaedro inscritto nell'ottaedro

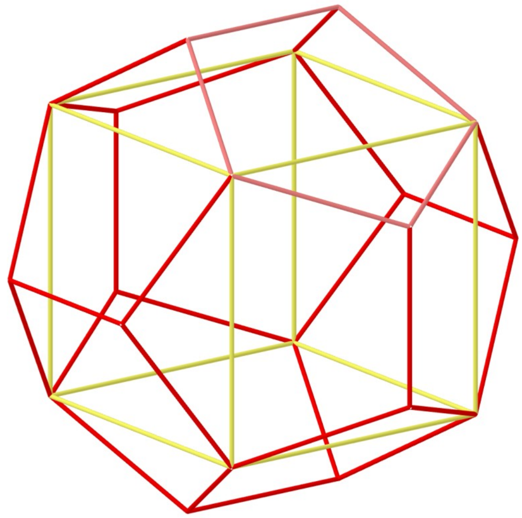
Un icosaedro regolare può essere inscritto in un ottaedro regolare in modo che ciascuno dei dodici vertici dell'icosaedro giaccia su uno dei dodici spigoli dell'ottaedro, e questi vertici dividono gli spigoli in un rapporto aureo ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618\ldots$ è il *rapporto aureo*, dato dall'equazione $\frac{\phi}{1}=\frac{\phi+1}{\phi}$ o equivalentemente $\phi^2=\phi+1$)



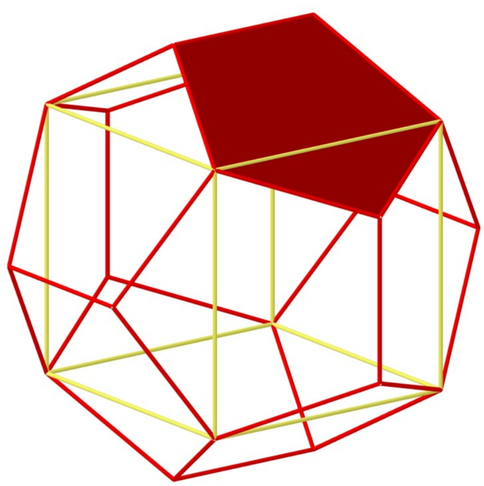
Disegna questa costruzione su un foglio di carta, costruiscila con dei bastoncini e dimostra matematicamente che funziona. Suggerimento: ogni faccia dell'ottaedro contiene una faccia triangolare dell'icosaedro. Calcola la lunghezza del suo lato. Gli altri spigoli dell'icosaedro giacciono all'interno dell'ottaedro. Dimostra che la loro lunghezza è la stessa degli spigoli costruiti in precedenza.



Il dodecaedro circoscritto al cubo



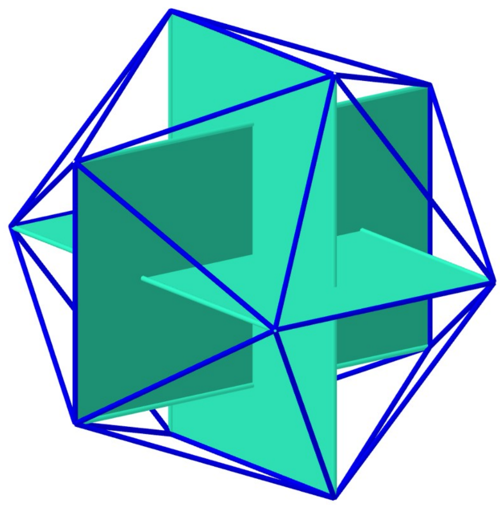
Prendi un cubo. Sopra ogni faccia quadrata, costruisci un "tetto" composto da due triangoli su lati opposti e due trapezi su lati opposti, usando cinque bastoncini (prima costruisci i due triangoli aggiungendo due bastoncini a ciascuno dei due lati opposti, poi unisci i vertici liberi con il bastoncino rimanente). Costruisci i tetti su ciascuna faccia del cubo in modo che un trapezio incontri un triangolo. Se la lunghezza dei nuovi spigoli è esattamente 1/ϕ dello spigolo del cubo, allora il trapezio e il triangolo accoppiati attorno allo spigolo di un cubo si allineeranno perfettamente per formare un pentagono regolare e il risultato globale sarà un dodecaedro regolare.



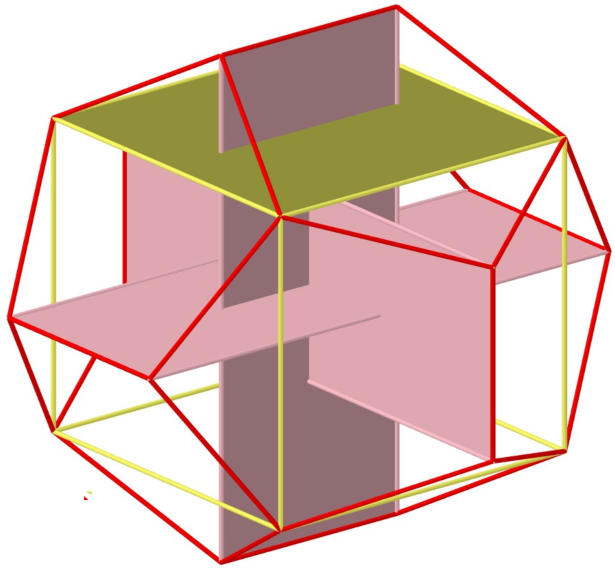
Disegna questa costruzione su un foglio di carta, costruiscila con dei bastoncini e dimostra matematicamente che funziona.

Sfide extra

- Prendi tre rettangoli aurei (in un *rettangolo aureo* la lunghezza è ϕ moltiplicata per la larghezza). Taglia una fessura al centro di ciascuno di essi (la dimensione è la larghezza dei rettangoli) e assemblali in modo che ogni rettangolo sia perpendicolare agli altri due. I dodici vertici sono disposti come in un icosaedro. Dimostralo e costruiscilo.
  Nota: la maggior parte delle carte di credito e dei biglietti da visita sono rettangoli aurei. Puoi usare queste carte e un po' di spago per creare i bordi.



- Prendi tre rettangoli la cui lunghezza è ϕ^2 volte la larghezza. Taglia una fessura al centro di ciascuno di essi e assemblali in modo che ogni rettangolo sia perpendicolare agli altri due. Inserisci questa costruzione nel centro di un cubo di lato ϕ, mantenendo i rettangoli paralleli alle facce. Quindi, i dodici vertici dei tre rettangoli, più gli otto vertici del cubo, formano l'insieme dei vertici di un dodecaedro regolare.



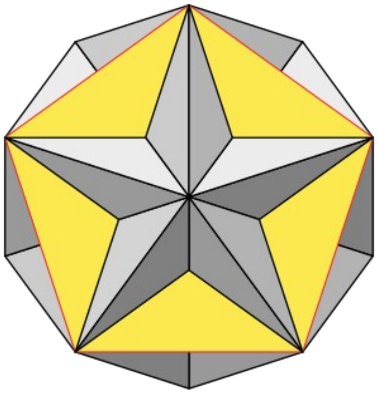
- Costruisci un modello in GeoGebra calcolando le coordinate cartesiane di tutti i vertici.

  Soluzione:

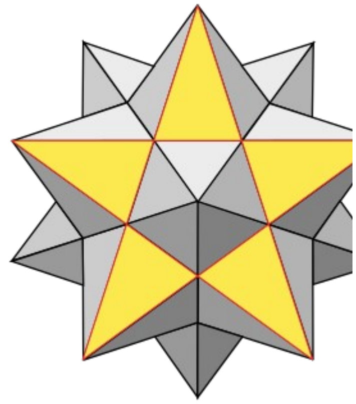
  - Cubo: $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$
  - Tetraedro: il sottoinsieme dei vertici del cubo, tale che vi sia un numero pari di segni meno.
  - Ottaedro: $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$
  - Icosaedro: $\left(\pm\frac{1}{\phi}, 0, \pm\left(1-\frac{1}{\phi}\right)\right)$ e le loro permutazioni cicliche, vale a dire $\left(0, \pm\left(1-\frac{1}{\phi}\right), \pm\frac{1}{\phi}\right)$ e $\left(\pm\left(1-\frac{1}{\phi}\right), \pm\frac{1}{\phi}, 0\right)$.
  - Dodecaedro: quelli del cubo insieme a $\left(\pm\frac{1}{\phi}, 0, \pm\phi\right)$ e le loro permutazioni cicliche, vale a dire $\left(0, \pm\phi, \pm\frac{1}{\phi}\right)$ e $\left(\pm\phi, \pm\frac{1}{\phi}, 0\right)$.

Poliedro regolare	Numero di facce	Numero di vertici	Numero di spigoli	Lunghezza dello spigolo
Icosaedro	20	12	30	$\frac{1}{\phi^2}$
Ottaedro	8	6	12	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tetraedro	4	4	6	$\sqrt{2}$
Cubo	6	8	12	1
Dodecaedro	12	20	30	$\frac{1}{\phi}$

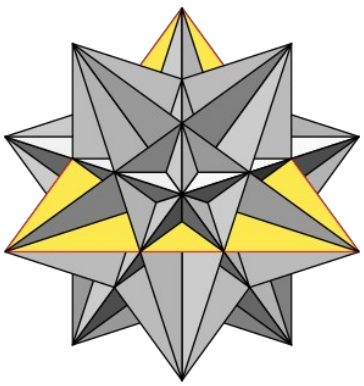
I poliedri di Kepler-Poinsot



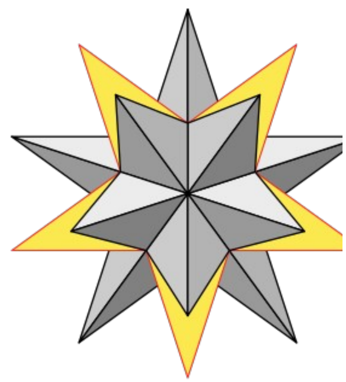
Grande dodecaedro



Piccolo dodecaedro stellato



Grande icosaedro



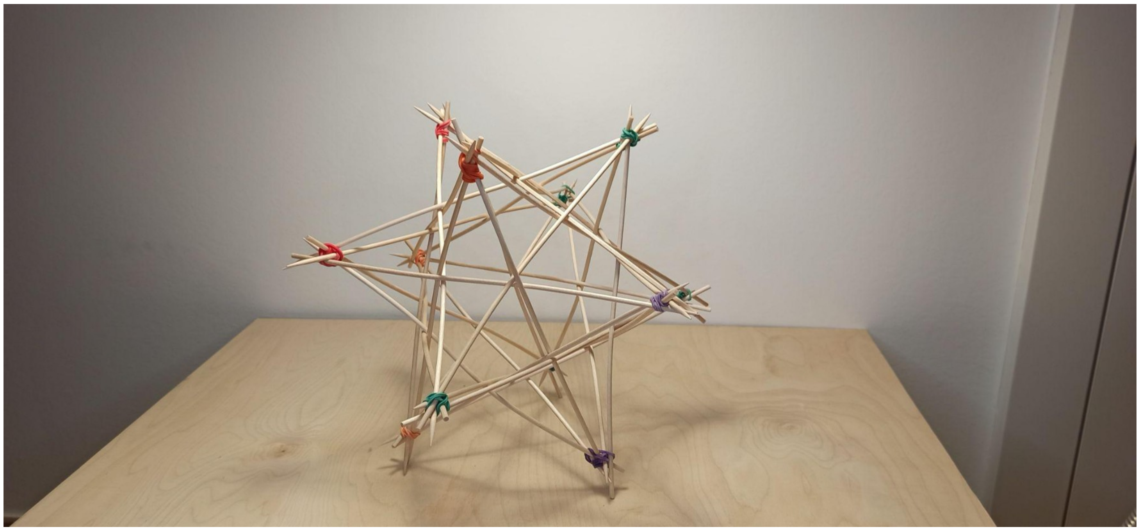
Grande dodecaedro stellato

Esistono quattro poliedri di Kepler-Poinsot, tutti non convessi. Sembrano avere molte facce, spigoli e vertici. Ad esempio, per costruire un *piccolo dodecaedro stellato* di cartone, è necessario tagliare e incollare 60 facce. Questo poliedro ha 90 spigoli e 32 vertici. Quindi, la relazione di Eulero è di nuovo vera.

Ma i matematici hanno molta immaginazione e creatività. Infatti, guardate di nuovo il piccolo dodecaedro stellato. E guardate i cinque triangoli gialli. Giacciono tutti sullo stesso piano. Se dovessimo completare la parte centrale mancante (che ha la forma di un pentagono), ciò che otteniamo è una normale stella a cinque punte, chiamata *pentagramma* . Quindi, i matematici possono decidere di vedere la parte centrale della stella non come mancante, ma come situata all'interno del poliedro. Lo stesso vale per tutte le altre piccole facce. A gruppi di cinque, appartengono ad altri pentagrammi, la cui parte centrale si trova all'interno del poliedro. Poiché abbiamo iniziato con 60 facce, questo si tradurrà in dodici pentagrammi.

Possiamo quindi considerare questo piccolo dodecaedro stellato come avente dodici (da cui il nome) *facce generalizzate* a forma di pentagramma, che possono intersecarsi! I matematici decidono di ampliare la definizione di poliedro, in modo da consentire una tale costruzione, Ora siete invitati ad analizzare in modo simile gli altri tre poliedri di Kepler-Poinsot. I due *dodecaedri stellati* hanno dodici facce, che hanno la forma di pentagrammi. Il *grande dodecaedro* ha dodici facce pentagonali intersecanti. Il grande *icosaedro* ha venti facce triangolari intersecanti.

Puoi provare a costruire alcuni di questi poliedri utilizzando spiedini e/o cartone.



Altre risorse

- Leggi online , con app interattive e film.
- L'associazione portoghese Atractor ha molte animazioni e immagini di poliedri (e delle loro reti, proprietà, ecc.) sul suo sito .
- Zometool. L'ossessione di Kepler's Kosmos .

Crea e condividi!

Condividi i risultati dei partecipanti utilizzando gli hashtag **#idm314polyhedra** e **#idm314** .