



## L'evoluzione della fiducia

Questa attività è un'introduzione alla teoria dei giochi. Più specificamente, si basa sul famoso "*dilemma del prigioniero*" e sui concetti di gioco formale, strategia, cooperazione/defezione e collaborazione. Questa attività analizza matematicamente una situazione di competizione (semplificata) tra due giocatori avversari e fornisce le condizioni in base alle quali i giocatori possono sviluppare una strategia di cooperazione per ottenere un vantaggio reciproco, invece di applicare una strategia di competizione ostile.

La teoria dei giochi e questo tipo di analisi trovano applicazione in economia, politica, risoluzione dei conflitti, ma anche nella biologia evolutiva nel contesto delle specie in competizione.

Questa attività si basa e utilizza il gioco online *The Evolution of Trust*, di Nicky Case ([The Evolution of Trust](#)). Il gioco, a sua volta, si basa sul libro *The Evolution of Cooperation* di Robert Axelrod (edizione originale inglese: Basic Books, 1984).

### **Partecipanti:**

Età consigliata: dai 14 anni in su. Non sono richieste conoscenze matematiche pregresse, ma alcune argomentazioni logiche, come l'identificazione di paradossi e la formulazione di deduzioni, potrebbero richiedere un pensiero matematico maturo. Sebbene l'attività non riguardi politica o etica, è possibile trarne implicazioni e innescare un dibattito ideologico.

### **Preparazione:**

La prima parte dell'attività richiede una pila di monete e alcuni pezzi di carta. Il numero di monete è (idealmente) 30 volte il numero di studenti. Le "monete" possono essere denaro vero (con un valore nominale sufficientemente basso da essere poco costoso), oppure possono essere sostituite con fagioli secchi, ceci, pezzetti di pasta, noci o qualsiasi altro tipo di piccolo oggetto identico che si possa reperire a basso costo. Il numero di monete per studente può essere ridotto riducendo il numero massimo di partite giocate per coppia.

La seconda parte del workshop prevede l'utilizzo di un computer da parte dell'insegnante, collegato a un proiettore o a uno schermo, in modo che tutti gli studenti possano guardare le simulazioni e discuterne insieme.

# Introduzione

Oggi esploreremo una branca della matematica che potrebbe sorprenderti. Si chiama **Teoria dei Giochi** e si applica alla politica, all'economia, alla risoluzione dei conflitti e anche alla biologia evolutiva. Nella Teoria dei Giochi, progettiamo *giochi formali*, ovvero situazioni in cui due o più *giocatori* devono prendere decisioni razionali, cercando di raggiungere un *obiettivo* che consenta loro di vincere la partita. Ogni giocatore può sviluppare una *strategia*, ovvero un insieme di regole per prendere queste decisioni, a seconda dell'ambiente di gioco e anche del comportamento degli altri giocatori.

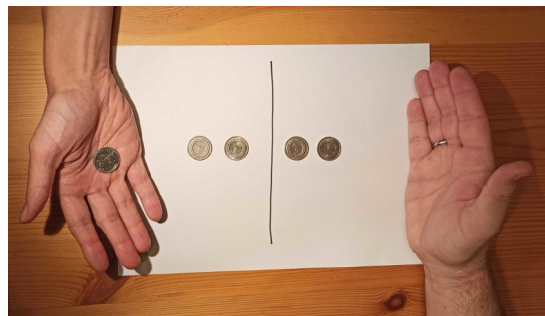
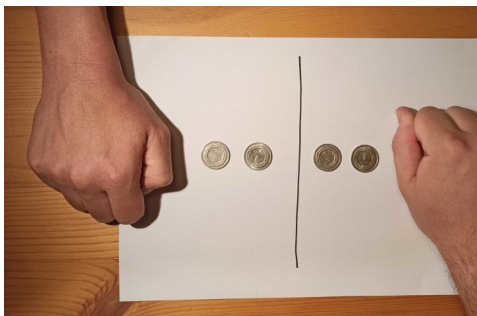
Gli scacchi o il poker sono giochi, ma anche i rivenditori che stabiliscono i prezzi dei beni in un mercato competitivo, i governi che negoziano conflitti geopolitici o le specie biologiche che si evolvono per adattarsi a un ecosistema sono esempi concreti che possono essere modellati come giochi.

Faremo un gioco molto semplice, che però può ispirare qualche profonda riflessione.

## Il gioco (un round)

Questo è un gioco per due giocatori. Devono sedersi a un tavolo, uno di fronte all'altro. Al centro del tavolo, posiziona un foglio di carta diviso in due metà da una linea. Le due metà vengono posizionate alla destra e alla sinistra dei giocatori. Il foglio di carta rappresenta la *Macchina dei Soldi*. Il meccanismo della Macchina è il seguente:

- Vengono inserite quattro monete nella macchina, due per lato.
- Ogni giocatore riceve una moneta.
- Ogni giocatore può inserire la propria moneta nella Macchina (sul lato destro del foglio) oppure no. Se il giocatore A inserisce una moneta sul suo lato della macchina, le tre monete risultanti (due dalla Macchina più quella inserita dal giocatore A) vengono date al giocatore B. Se il giocatore A non inserisce una moneta, il giocatore B non riceve nulla. Viceversa, se il giocatore B inserisce una moneta, il giocatore A riceve tre monete; altrimenti, il giocatore A non riceve nulla.
- Entrambi i giocatori devono decidere le loro azioni contemporaneamente. Per farlo, segretamente sotto il tavolo, mettono una moneta o niente nella mano destra. Quindi entrambi i giocatori mettono la mano destra sul tavolo e la aprono contemporaneamente.
- L'obiettivo del gioco è guadagnare più monete possibile.

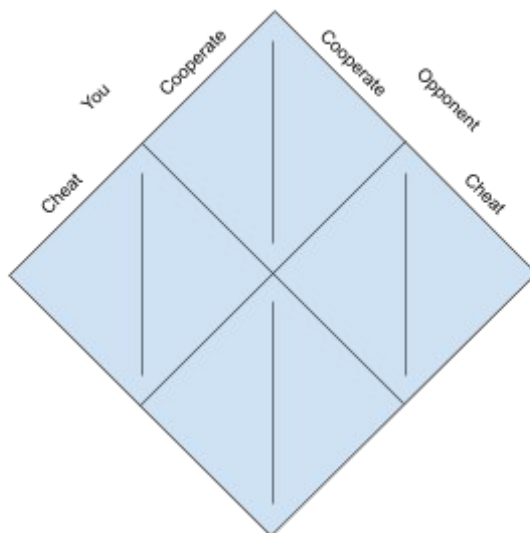


Devi pagare una moneta, quindi il tuo avversario ne vince tre.

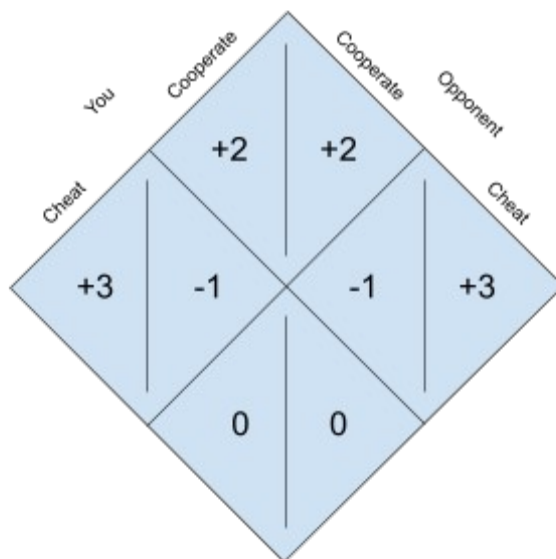
# Analisi a ciclo unico: il dilemma del prigioniero

Raccogliere le impressioni e le strategie degli studenti.

Chiamiamo le due azioni che puoi compiere "Collaborare" (*cooperate*, mettere una moneta e ricompensare l'avversario) e "Barare" (*cheat*, non mettere una moneta e non dare alcuna ricompensa all'avversario). Crea una tabella a partita doppia che mostri i quattro possibili esiti del gioco.



Su ciascuno dei quattro possibili esiti, posiziona le ricompense che ogni giocatore riceve. Un valore negativo indica che il giocatore perde denaro.



Qual è la strategia migliore?

- Se il tuo avversario collabora, puoi vincere +2 (se collabori) oppure +3 (se imbrogli), quindi è meglio imbrogliare.
- Se il tuo avversario bara, puoi perdere -1 (se collabori) oppure vincere 0 (se bari), quindi è meglio barare.

Pertanto, in ogni caso, è meglio barare. Tuttavia, la stessa logica si applica al tuo avversario, quindi anche lui decide che è meglio barare. Pertanto, entrambi barate e non vincete nulla. Se entrambi collaboraste, il risultato sarebbe migliore per entrambi (+2 a testa). Da qui il dilemma.

Questo gioco è anche chiamato "dilemma del prigioniero", a causa di una formulazione diversa ma analoga: due ladri vengono catturati in prigione. Ognuno può accusare l'altro o rimanere in silenzio. Se entrambi tacciono (collaborano), entrambi vengono condannati a un anno di carcere. Se uno accusa e l'altro rimane in silenzio, l'accusatore viene rilasciato dal carcere e l'altro riceve una condanna a 3 anni. Se entrambi accusano, entrambi ricevono una condanna a 2 anni. Ogni prigioniero può vedere che, per qualsiasi azione del suo avversario, è meglio barare. Tuttavia, entrambi giungono alla stessa conclusione, entrambi barano, e quindi ciascuno di loro riceve una condanna a 2 anni, mentre avrebbero potuto ricevere solo una condanna a 1 anno se avessero collaborato.

## Gioco iterato

Sembra che in un round sia meglio barare anche se si potrebbe fare di meglio, per via del rischio di essere ingannati. Si può provare a convincere l'avversario a parole, ma non si può mai essere certi che manterrà la parola data. Tuttavia, la situazione cambia se si gioca ripetutamente. In questo caso, si possono basare le proprie decisioni sulle azioni precedenti dell'avversario, oltre che sulle regole del gioco.

Ogni giocatore inizia con 10 monete, a cui si aggiunge una pila di 40 monete (la Banca) che ricarica la macchina . Dopo un round, la Banca ripristina la macchina, che contiene di nuovo quattro monete. Il gioco si ripete più volte e l'obiettivo è accumulare più monete possibile.

Nota che, ancora una volta, puoi far ricevere monete al tuo avversario, ma questo ti costa denaro. Allo stesso modo, il tuo avversario può anche darti una ricompensa a un costo. Il tuo avversario non sa cosa giocherai nel round successivo, ma ricorda le tue azioni precedenti.

Giocate diverse partite e cercate di elaborare una strategia. Dopo aver giocato con un compagno, passate a giocare con un altro. Infine, condividete le vostre scoperte e le strategie che stavate giocando con il resto della classe.

Annota le strategie sulla lavagna. Alcune delle strategie che potrebbero essere adottate:

- **IMBROGLIONE:** Imbroglia sempre.
- **COOPERATORE:** Collabora sempre.
- **IMITATORE:** Inizia a collaborare, poi fa la stessa cosa che ha fatto l'avversario nel round precedente.

<sup>1</sup> Questo vale per 10 round. Per n round, ciascuno dei due giocatori deve iniziare con n monete e la macchina con 4n monete, per tenere conto dei casi estremi in cui i giocatori o la macchina esauriscono tutti i loro soldi.

- RANCOROSO: Inizia a collaborare e continua a farlo, ma se l'avversario bara, da quel momento in poi continuerà a barare.
- DETECTIVE: Gioca alcuni round per mettere alla prova l'avversario (ad esempio, collabora, imbrogli, collabora, collabora). Poi, se l'avversario non imbrogli mai, sfrutterà il vantaggio e imbroglierà sempre. Se l'avversario imbrogli in qualsiasi momento, sarà cauto e giocherà come IMITATORE.

Se ti viene in mente un'altra strategia, scrivila sulla lavagna e dagli un nome carino.

Discutete su quale strategia sia la migliore.

**Intuizione chiave** : non esiste una strategia migliore in termini assoluti.

**Esercizio** : Dimostra che nessuna strategia è la migliore indipendentemente dalla strategia dell'avversario. Suggerimento: Immagina che il tuo avversario sia un IMBROGLIONE. Qual è la strategia migliore? Immagina che il tuo avversario sia un RANCOROSO. Qual è la strategia migliore?

In conclusione, non esiste un modo per garantire il miglior risultato possibile indipendentemente dalla strategia dell'avversario. A differenza, ad esempio, degli scacchi, dove si dovrebbe sempre cercare di giocare la mossa che offre il massimo vantaggio.

**Intuizione chiave** : iterare il gioco è necessario per sviluppare un certo grado di fiducia. La cronologia delle partite aiuta a valutare il proprio avversario. Inoltre, è necessaria la possibilità di un incontro futuro, quindi il gioco dovrebbe essere giocato per un numero indeterminato di round.

**Esercizio** : Dimostra che se i giocatori conoscono il numero di round da giocare, il dilemma originale riemerge; ovvero, puoi dimostrare che la strategia migliore è sempre quella di barare. Suggerimento: nell'ultimo round, non c'è alcun futuro da influenzare, quindi la strategia migliore è barare (dato che rimane solo un round). Una volta che tu e il tuo avversario avete deciso di barare nell'ultimo round, l'ultimo round che conta è il penultimo, quindi conviene barare lì. Per induzione, entrambi i giocatori bareranno sempre. Tuttavia, discuti la validità di questo argomento induttivo.

## Simulazioni al computer

Ora è il momento di usare il computer per simulare centinaia di partite e analizzarne i risultati. Questo farà luce su quale strategia sia la migliore.

L'insegnante apre il computer e il proiettore per tutta la classe e va al gioco online *The Evolution of Trust* di Nicky Case ([The Evolution of Trust](#)). Puoi passare direttamente alla sezione **3. Un torneo** .

Qui confrontiamo cinque strategie confrontando ogni possibile incontro tra due avversari con strategie diverse.

**Nota** : piazza la tua scommessa, o fai in modo che ogni studente ne piazzasse una, come indicato nel gioco. Puoi analizzare ogni partita tra due giocatori. Puoi ignorare i commenti sulla storia della Prima Guerra Mondiale.

**Intuizione chiave** : il vincitore è l'IMITATORE. Questa strategia, chiamata anche "occhio per occhio", può essere vista come un principio morale: fai agli altri ciò che gli altri fanno a te. Combina la volontà di collaborare, ma allo stesso tempo si difende dagli abusi altrui. È fondamentale notare che l'efficacia di questa strategia è un dato di fatto matematico, non qualcosa imposto da un'etica umana.

## Evoluzione

Ora, simuliamo cosa accadrebbe in uno scenario con molti giocatori, ognuno dei quali utilizza una singola strategia. Alcuni giocatori otterranno risultati migliori (vincitori) rispetto ad altri (perdenti). Supponiamo che i perdenti decidano di cambiare strategia e copiare quella dei vincitori. Cosa accadrebbe nel lungo periodo? La popolazione evolverà verso uno stato in cui tutti applicano la stessa strategia?

Nel gioco online, vai al **punto 4. Torneo ripetuto** . Segui lentamente la spiegazione per capire perché l'IMITATORE vince di nuovo il torneo.

## Diffidenza

Sebbene l'IMITATORE sembri una strategia vincente, si tratta di un gioco molto delicato. Le cose potrebbero andare male per diversi motivi:

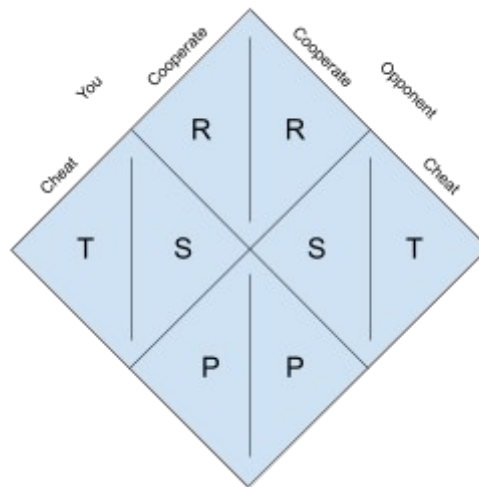
- Mancanza di interazioni sufficienti. Le simulazioni mostrano che con meno round per partita, l'IMITATORE non è più una strategia vincente.

Intuizione chiave: con poche interazioni, ad esempio un solo round, non c'è tempo per creare abbastanza fiducia per collaborare e l'IMBROGLIONE può ottenere ricompense migliori.

- Non c'è abbastanza incentivo a cooperare. Cambia i payoff e vedrai che la strategia vincente cambia.

Intuizione chiave: questo è un gioco a somma non zero. Ciò significa che entrambi i giocatori possono avere una situazione win-win, che favorisce la collaborazione. In questo gioco, ciò deriva dal fatto che la macchina produce nuova moneta. Il contrario è un gioco a somma zero, in cui tutto ciò che un giocatore vince deve essere una perdita per l'altro. In questo caso è impossibile sviluppare una collaborazione perché non c'è un bene comune da raggiungere.

Esercizio. Considera le combinazioni nel grafico:



dove:

R = ricompensa per la cooperazione reciproca

S = ricompensa del credulone

T = tentazione di imbrogliare

P = punizione per l'imbroglio reciproco

Parte 1: Ordina le quattro quantità per incoraggiare la cooperazione.

Risposta:

$$T > R > P > S$$

Parte 2: Trova una condizione per cui la cooperazione sia migliore rispetto a vincere metà delle volte e perdere l'altra metà (mancanza di cooperazione da parte di ciascun giocatore che sfrutta l'altro a turno)

Risposta:

$$R > \frac{T+S}{2}$$

Queste due equazioni definiscono il "gioco del dilemma del prigioniero".

## Errori

Supponiamo che un giocatore abbia una piccola probabilità di commettere un errore, che lo porti a fare l'opposto di ciò che intende secondo la sua strategia.

In questo caso, ad esempio, l'IMITATORE entrerebbe in una catena di ritorsioni reciproche che durerebbe per sempre.

Introduci alcune nuove strategie per affrontare gli errori casuali

- **IMITATORE INDULGENTE:** Simile all'IMITATORE, copierà l'ultima mossa dell'avversario se è "cooperativo", ma barerà solo se le ultime due mosse dell'avversario erano bari. È più indulgente dell'IMITATORE.

- **BABBEO**: Inizia cooperando. Poi, se l'avversario collabora, ripete la mossa precedente; se l'avversario bara, fa l'opposto.
- **CASUALE**: Sceglie casualmente con una probabilità del 50/50.

Prova i tornei con questi nuovi giocatori.

## Sandbox

Prova a trovare una configurazione del gioco (numero e tipo di giocatori, vincite, regole del torneo), senza che tutti i giocatori siano inizialmente identici, in modo che:

- Vince il CASUALE.
- Vince il COOPERATORE.
- Sopravvivono due diversi tipi di giocatori.
- Sopravvivono tre diversi tipi di giocatori.
- Esplora da solo

## Conclusioni

Riepiloga tutti gli approfondimenti chiave e avvia una discussione/un dibattito.

Alcuni punti chiave per promuovere la collaborazione sono:

- Interazioni ripetute
  - Non possiamo collaborare se non abbiamo avuto tempo per imparare gli uni dagli altri.
  - Non è possibile collaborare se non c'è un futuro sul quale agire.
- Possibilità di situazioni vantaggiose per tutti.
  - Non è possibile collaborare in un gioco a somma zero. Ma la maggior parte dei giochi nella vita reale sono giochi a somma non zero, che consentono a tutti i giocatori di vincere qualcosa.
  - Ricorda i vincoli matematici su T,R,S,P.
- Bassa incomprensione
  - Conviene perdonare e superare qualche piccola incomprensione.
- Non esiste una strategia migliore che sia indipendente dagli altri giocatori: bisogna adattarsi all'ambiente.
- Non essere invidioso
  - Non puoi collaborare se ti aspetti il miglior risultato per te individualmente o se il tuo obiettivo è superare gli altri.
- Non essere il primo a tradire
  - Devi reagire se vieni tradito, ma tradire a priori crea sfiducia, e in seguito si rende necessario ripristinare la collaborazione.
- Cooperazione reciproca e imbrogli
  - La mancanza di risposta porterà ad abusi o sfiducia.
- Non essere troppo furbo
  - Fai capire agli altri giocatori la tua strategia. Questo crea fiducia, poiché il risultato è più prevedibile.

## Contesto matematico e risorse

Questa attività è basata sul gioco The Evolution of Trust, di Nicky Case ([The Evolution of Trust](#)). Il gioco è basato sul libro *The Evolution of Cooperation* di Robert Axelrod (1984) e sul suo seguito *The Complexity of Cooperation* (1997) dello stesso autore.

Ulteriori risorse su [The Evolution of Trust: Feetnotes](#) .

### **Crea e condividi!**

Condividete le scoperte dei partecipanti utilizzando gli hashtag **#idm314trust** e

© 2025 Daniel Ramos

Questo lavoro è concesso in licenza con una [Deed - Attribution 4.0 International - Creative Commons](#)