



## La Galleria d'arte e il problema della fortezza

### **Partecipanti:**

dai 10 ai 12 anni e oltre.

Non sono richieste conoscenze matematiche pregresse.

### **Preparativi:**

Modelli stampati.

Matite di quattro colori diversi (ad esempio, rosso, verde, blu, giallo).

Fogli di carta bianchi per creare le tue gallerie d'arte.

Un'altra possibilità è quella di svolgere l'attività all'aperto, con gessetti colorati, nel cortile della scuola o per strada.

### **Attività 1. Proteggere la galleria d'arte con le telecamere**

Immagina di trovarti in una galleria d'arte piena di opere d'arte straordinarie. La galleria non ha la forma di un rettangolo o di un quadrato come al solito, ma la sua planimetria ha una forma particolare, con molti angoli e curve.

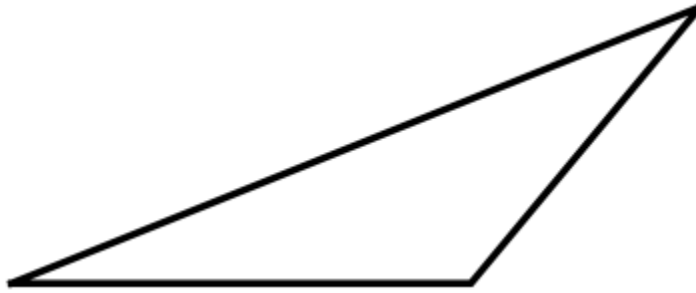
La forma è composta da linee rette che si incontrano negli angoli (in matematica si chiama *poligono*). La tua missione è posizionare strategicamente le telecamere in punti specifici della galleria per assicurarti che ogni punto della galleria sia visibile e sorvegliato. Ma ecco il trucco: devi usare il minor numero possibile di telecamere. E queste telecamere possono essere posizionate solo agli angoli della galleria.

Il tuo compito è installare il minor numero possibile di telecamere di sicurezza in modo che ogni singolo punto della galleria sia sotto sorveglianza. Questo è noto come il "*Problema della Galleria d'Arte*".

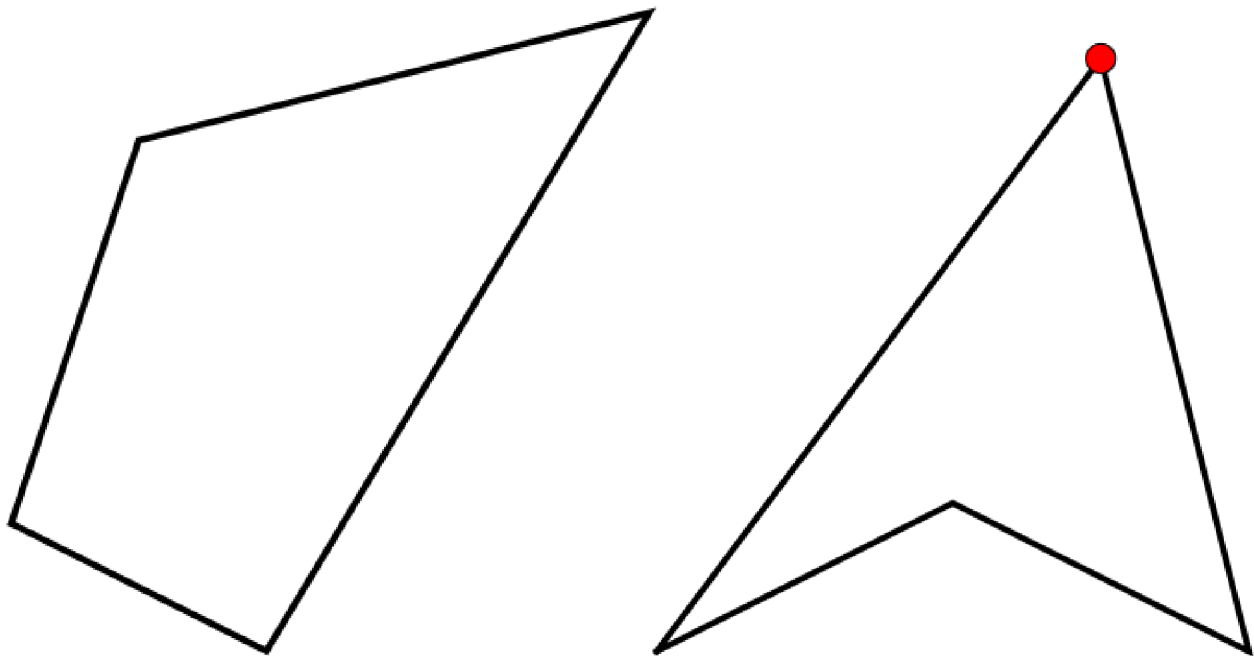
Utilizzando una matita, puoi tracciare delle linee rette partendo dalla telecamera, per tracciare l'area che la telecamera può inquadrare. Ricorda che non può vedere attraverso i muri. Puoi anche tracciare l'area di inquadratura della telecamera con un righello, per vedere cosa può inquadrare.

1. Iniziamo con l'esplorare alcuni casi semplici:

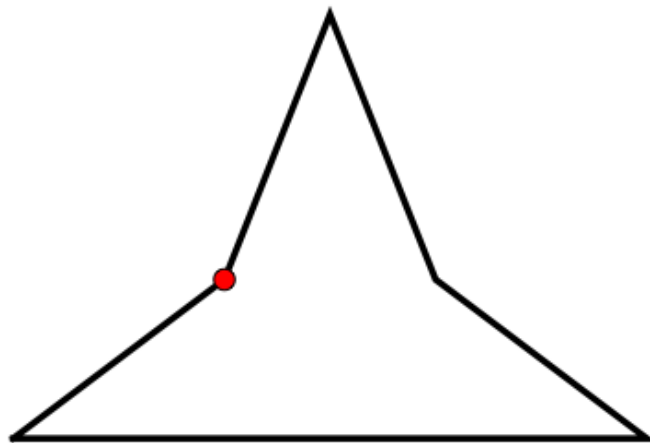
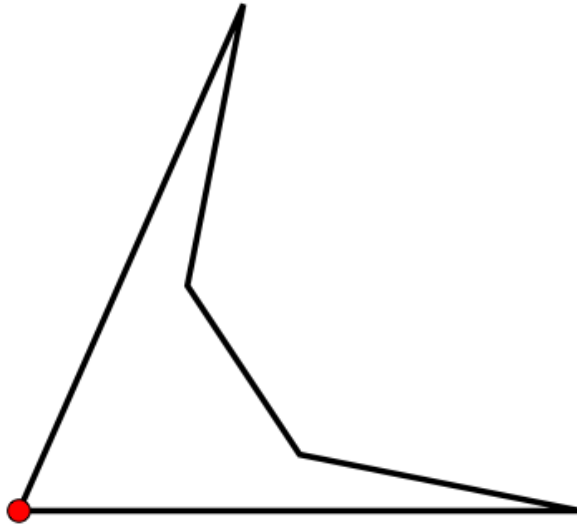
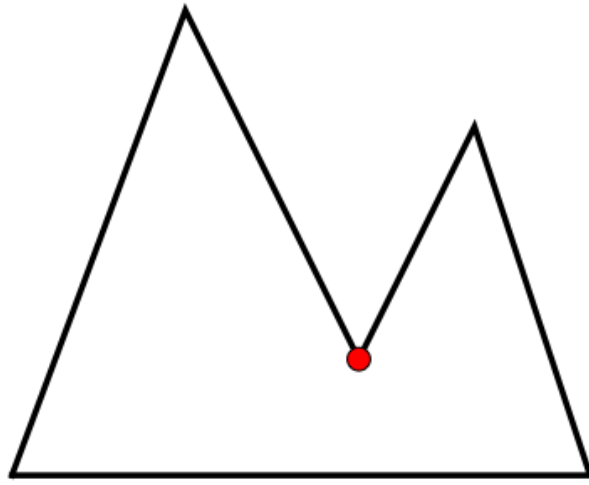
- Per una galleria con una disposizione triangolare, una telecamera è sufficiente e può essere posizionata in qualsiasi angolo (vertice), come di seguito:



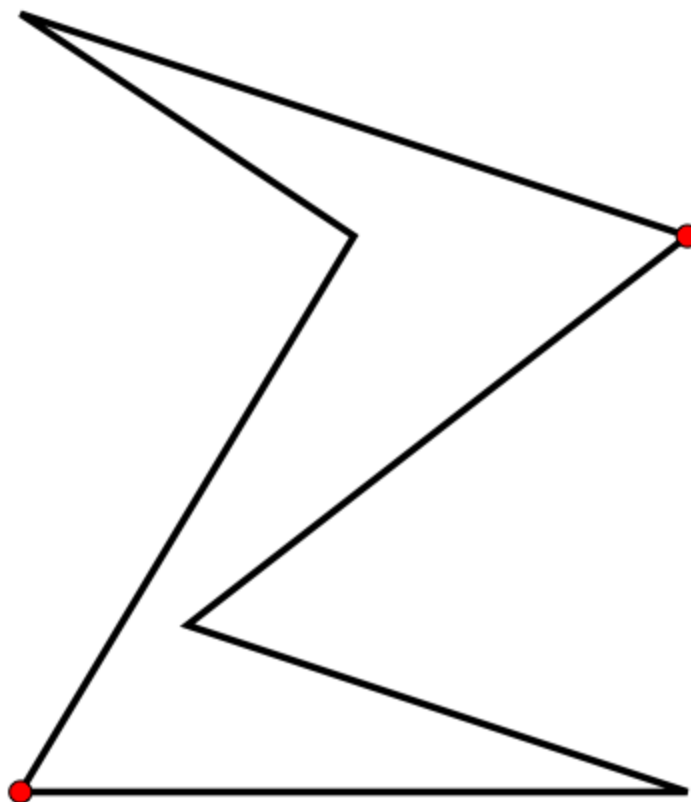
- In una galleria a quattro lati (chiamata *quadrilatero*), è sufficiente una sola telecamera. Se si tratta di una forma semplice con angoli rivolti verso l'esterno ("convesso"), è possibile posizionare la telecamera in qualsiasi angolo, come nell'immagine a sinistra in basso. Se il layout è più complesso, con alcuni angoli rivolti verso l'interno ("concavo"), è necessario scegliere la posizione della telecamera con maggiore attenzione per coprire tutto, come nell'immagine a destra in basso. Per la galleria a destra, è possibile una seconda posizione della telecamera. Riesci a trovarla?



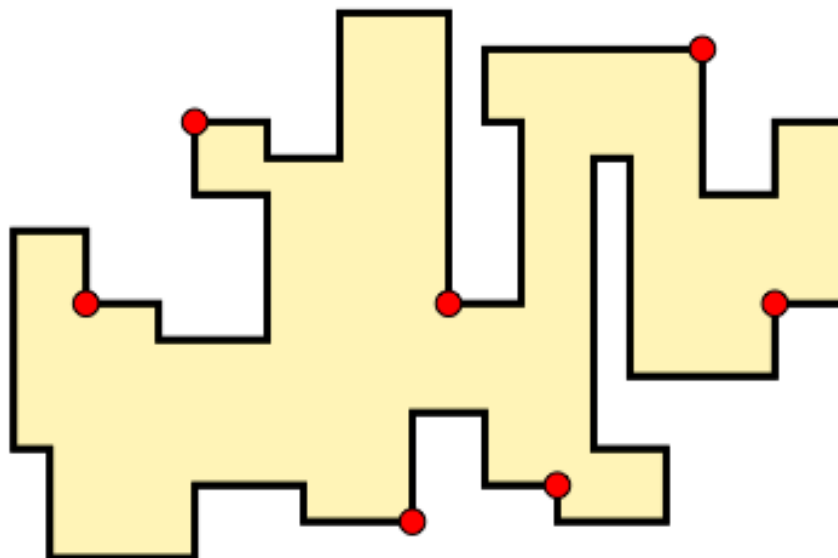
- Una singola telecamera è sufficiente anche in una galleria con cinque lati (pianta pentagonale). È sempre possibile posizionare una telecamera unica in un angolo, da cui è possibile vedere l'intero interno della galleria. Guarda le immagini qui sotto:



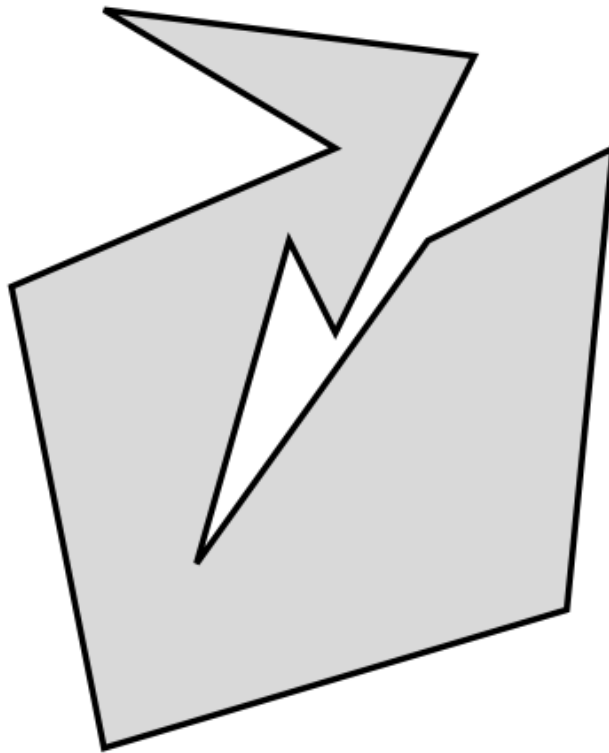
- Tuttavia, per la seguente galleria con sei lati sono necessarie due telecamere:



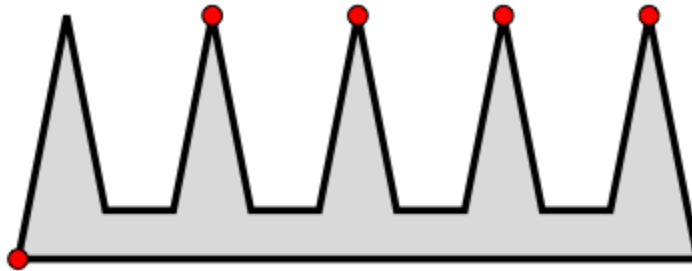
- Puoi verificare che per questa galleria siano sufficienti sette telecamere:



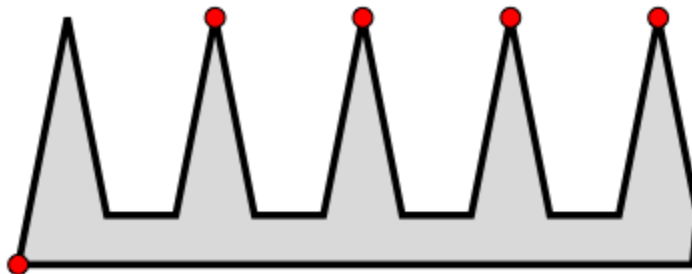
- Riesci a posizionare solo due telecamere per osservare la seguente galleria?

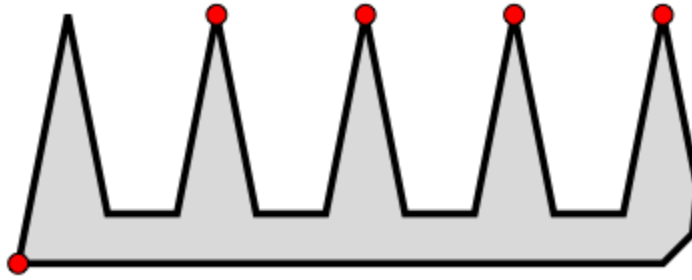


2. Passiamo ora a una regola matematica. Nella galleria d'arte qui sotto, con 15 lati, servono almeno 5 telecamere per coprirli completamente.



Non è possibile utilizzare meno di 5 telecamere e continuare a guardare tutto. Lo stesso vale per queste due gallerie con 16 e 17 lati.

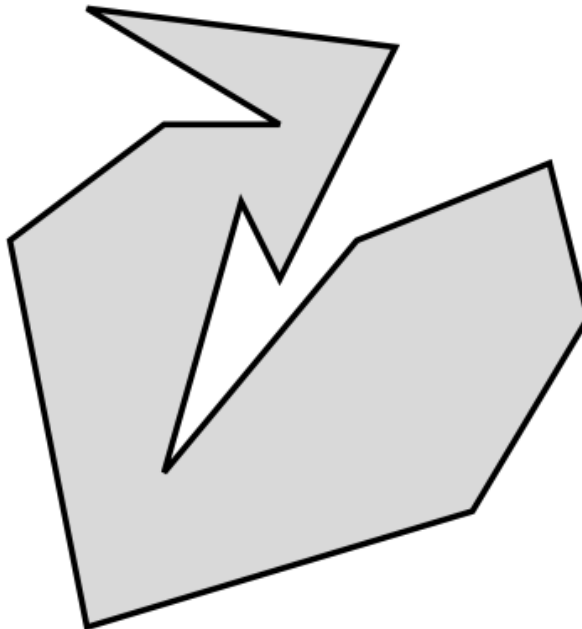




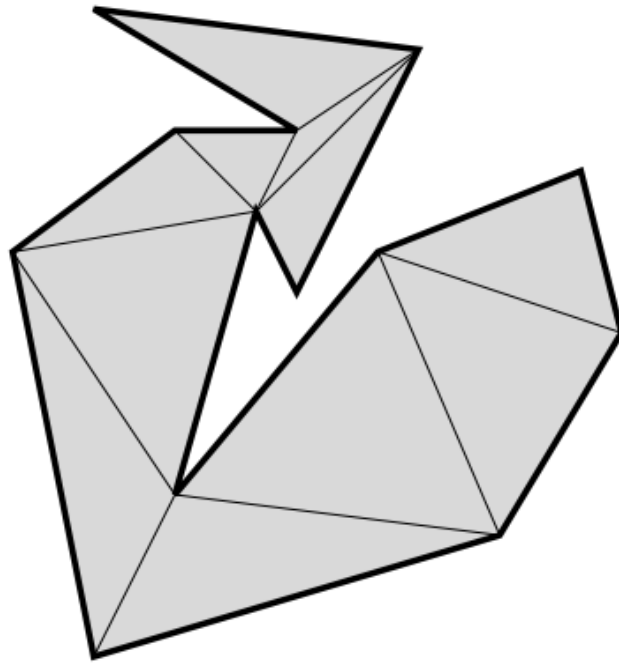
Si noti che 5 è il quoziente della divisione di 15, o 16, o 17 per 3. Rivedi tutti gli esempi precedenti e verifica che, in ogni caso, sia possibile guardare l'intera galleria con un numero di telecamere al massimo pari al quoziente della divisione del numero di lati per 3.

Il matematico Václav Chvátal dimostrò nel 1975 che un numero di telecamere pari al quoziente della divisione del numero di lati per 3 è sufficiente per qualsiasi galleria! Ad esempio: per gallerie a 6 lati sarebbero 2 telecamere, per gallerie a 10 lati sarebbero 3 telecamere, per gallerie a 23 lati sarebbero 7. È interessante notare che la regola di Chvátal funziona anche se si posizionano le telecamere all'interno della forma invece che solo sugli angoli. Quindi, è una linea guida utile per installare telecamere di sorveglianza in luoghi con forme diverse e complesse.

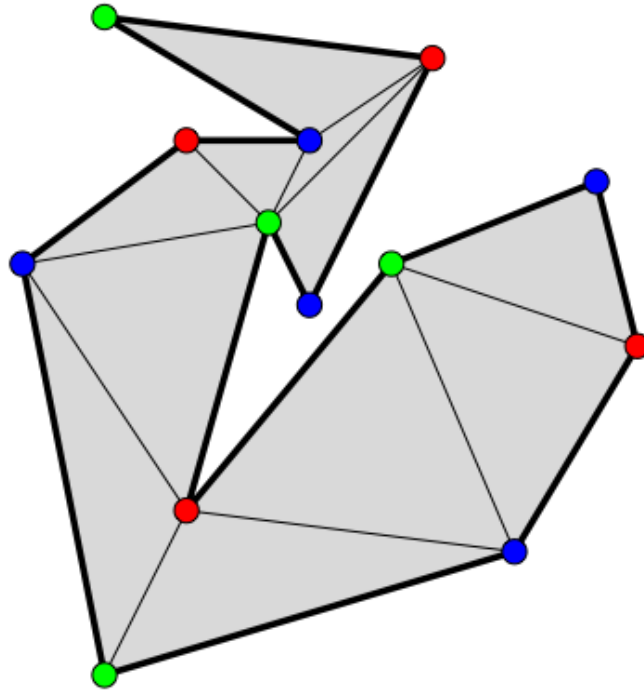
3. Una dimostrazione molto elegante, più semplice di quella di Václav Chvátal, fu proposta dal matematico Steve Fisk nel 1978. Fornisce un **algoritmo**, o una guida passo passo, per posizionare le telecamere. Diamo un'occhiata più da vicino al funzionamento di questo algoritmo nella galleria seguente.



- Il primo passo è dividere la nostra galleria d'arte in triangoli. Gli angoli dei triangoli si trovano nelle stesse posizioni degli angoli della galleria d'arte originale:

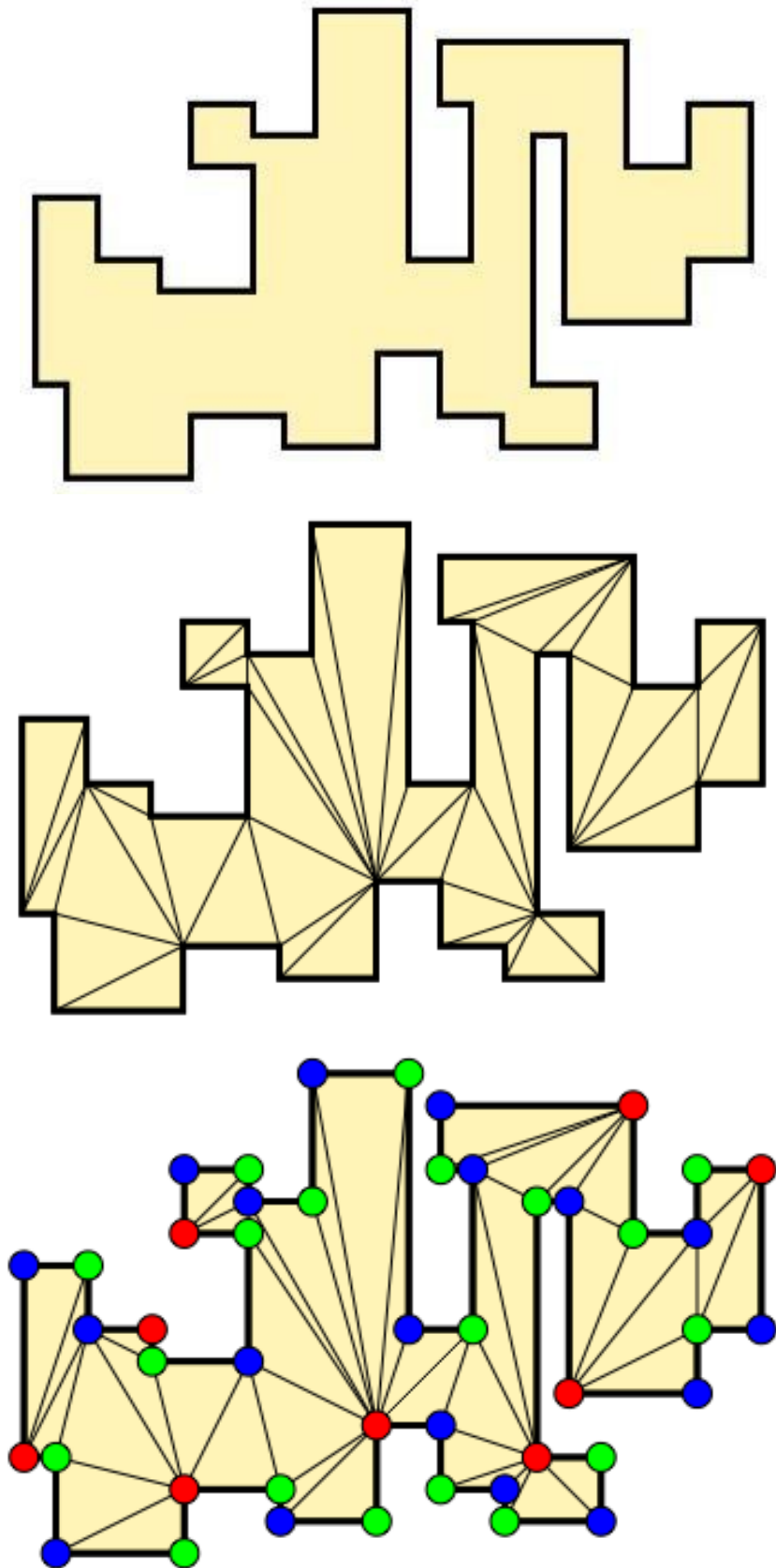


- Il passo successivo è assegnare uno dei tre colori (diciamo rosso, verde e blu) a ogni angolo in modo che ogni triangolo abbia angoli di tre colori diversi (ciò è sempre possibile).



- Scegli il colore che si vede meno. In questo caso, ci sono 4 punti con il colore rosso, 4 con il verde e 5 con il blu. Quindi, abbiamo due possibilità. Possiamo scegliere i 4 punti rossi e risolvere il problema posizionando le telecamere in corrispondenza di questi punti rossi. Avremmo anche potuto posizionare le telecamere in corrispondenza dei quattro punti verdi. In entrambi i casi, le quattro telecamere sono sufficienti per sorvegliare tutto.

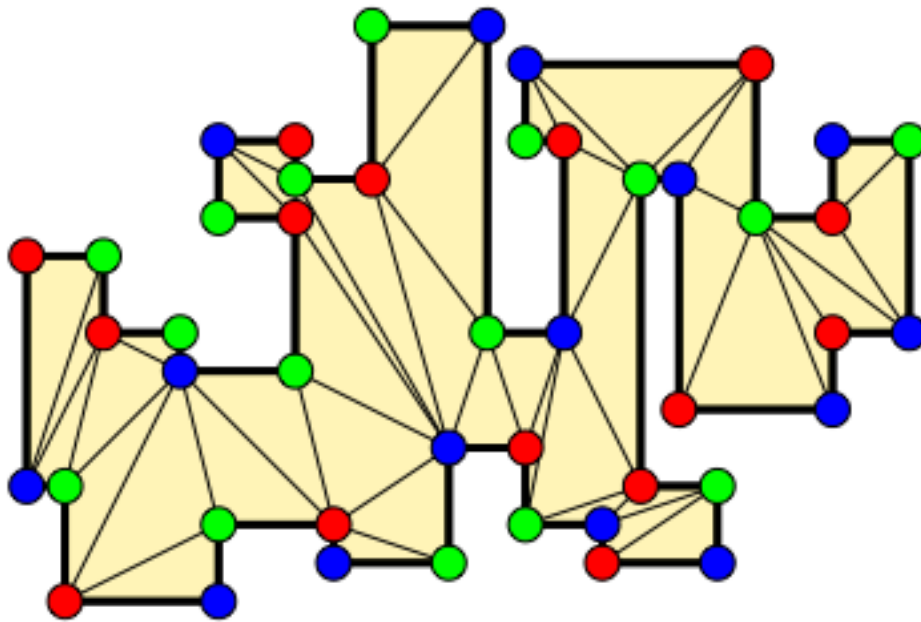
- Ecco un esempio più complicato:



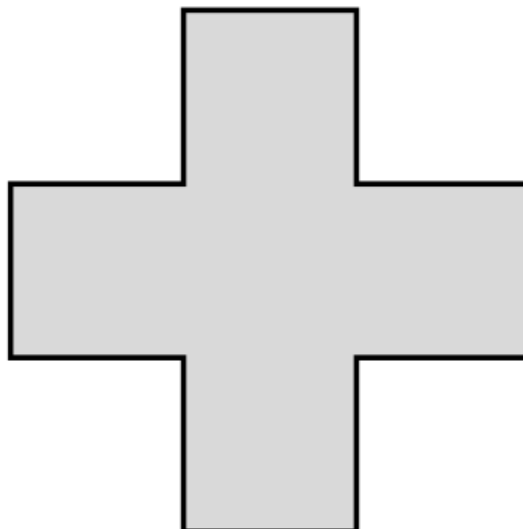
In questo caso, abbiamo 9 punti rossi, 18 punti blu e 19 punti verdi. Quindi, posizionando le telecamere ai 9 angoli rossi, risolviamo questo esempio.

C'è un altro fatto interessante su questo algoritmo: qui sotto, trovate un'immagine della stessa galleria ma con triangoli diversi rispetto all'immagine precedente. Si dice che "la *triangolazione* non è univoca", il che significa che ci sono diverse possibilità su come si può dividere una galleria in triangoli. Con triangoli diversi, abbiamo anche colori diversi per i punti a ogni angolo del triangolo. Ciò significa che per una galleria, c'è più di una soluzione su dove posizionare le telecamere. Nella nuova triangolazione qui sotto, ci sono 15 punti rossi, 15 punti blu e 16 punti verdi. Quindi, sono necessarie 15 telecamere, che possono essere posizionate in corrispondenza dei punti rossi o dei punti blu.

Questa soluzione non è economica come la precedente. L'algoritmo di Fisk fornisce soluzioni, ma potrebbero non essere ottimali.

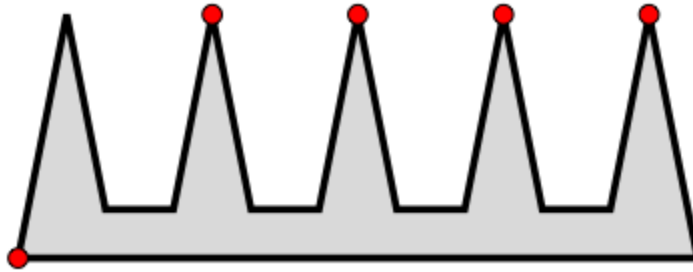


- Trova diversi modi per dividere questo poligono in triangoli ed esplora il posizionamento delle telecamere in ogni caso.



Esistono soluzioni molto migliori di quelle fornite dall' algoritmo. Queste soluzioni hanno una sola telecamera. Riesci a trovarle?

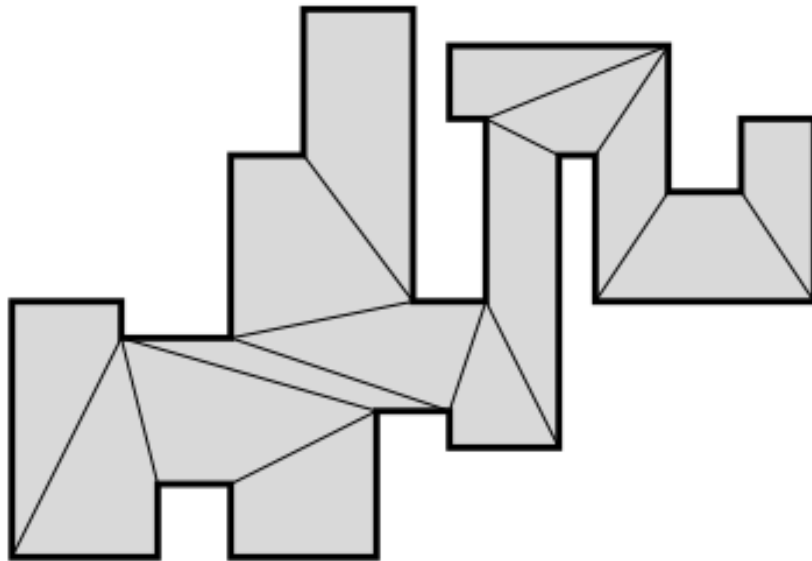
- Disegna i triangoli per i quali l' algoritmo fornisce la soluzione seguente (alcuni dei triangoli sono molto sottili):



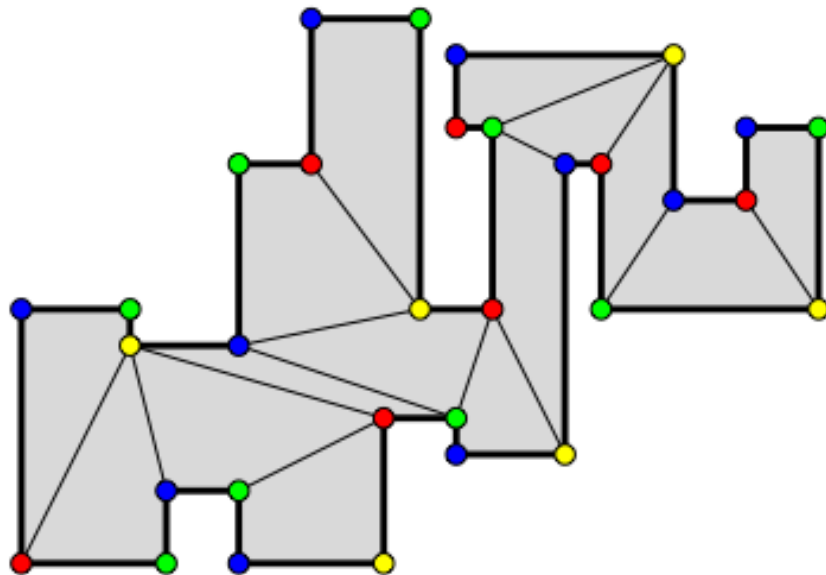
4. Disegna altre gallerie d' arte ed esplora l' algoritmo in esse contenuto.
5. Nel 1980, Jeff Khan, Maria Margaret Klawe e Daniel J. Kleitman trovarono una regola più ottimale per un tipo speciale di forma: una galleria con solo angoli retti. Una galleria di questo tipo è chiamata *galleria ortogonale*. Come sopra, è possibile utilizzare un certo numero di telecamere per sorvegliare l' intera area al suo interno. Questo numero di telecamere necessarie è diverso rispetto al caso della forma più generale di una galleria d' arte. Qui, non si divide il numero di lati per 3 (come sopra), ma per 4, e di nuovo si eliminano i decimali. Quindi, se la galleria ha 20 lati, si è sicuri che al massimo 5 telecamere siano sufficienti. Se la galleria ha 8 lati, al massimo due telecamere sono sufficienti. Poiché un quarto è più piccolo di un terzo, ciò significa che le gallerie d' arte con solo angoli retti, in generale, necessitano *di meno* telecamere!

L' idea di base è simile a quella discussa in precedenza. Vogliamo ancora una volta dividere la nostra galleria d' arte in forme più piccole. Ma poiché la nostra galleria d' arte ha la proprietà speciale di avere solo angoli retti, ora è possibile dividerla in forme quadrangolari chiamate "*quadrilateri*". I quadrilateri devono essere "convessi". Ciò significa forme quadrangolari con lati dritti e angoli non piegati verso l' interno (questo non era possibile nel caso della galleria d' arte più generale!).

Queste forme quadrangolari hanno i loro angoli in corrispondenza degli angoli della galleria d' arte. Questo metodo non è facile da realizzare o dimostrare, ma dimostra che è possibile coprire efficacemente l' intero interno di questo tipo di galleria d' arte con un numero specifico di telecamere.



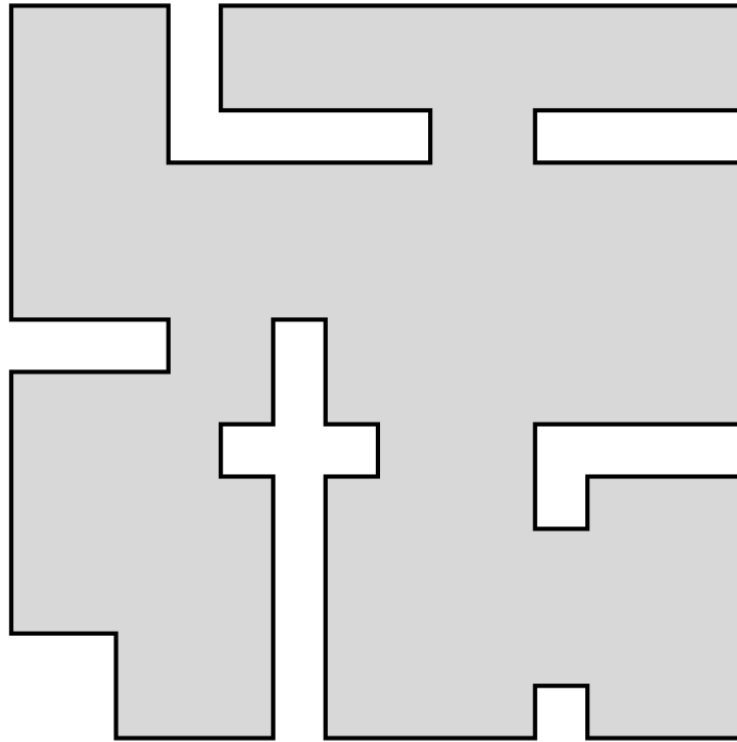
È possibile utilizzare quattro colori per dipingere gli angoli di queste forme a quattro lati, in modo che ogni angolo abbia un colore diverso, assicurandosi che tutti e quattro gli angoli di ogni forma abbiano tutti e quattro i colori utilizzati.



Ci sono 6 angoli gialli, 7 angoli rossi, 9 angoli verdi e 10 angoli blu. Ricorda che una telecamera posizionata in un qualsiasi angolo di un quadrilatero convesso può sorvegliare l'intero quadrilatero. Noi posizioniamo semplicemente le telecamere negli angoli gialli.

Poiché ora utilizziamo quattro colori diversi anziché tre, abbiamo bisogno di un numero minore di telecamere per sorvegliare ogni punto.

Esegui l'algoritmo su questa galleria:



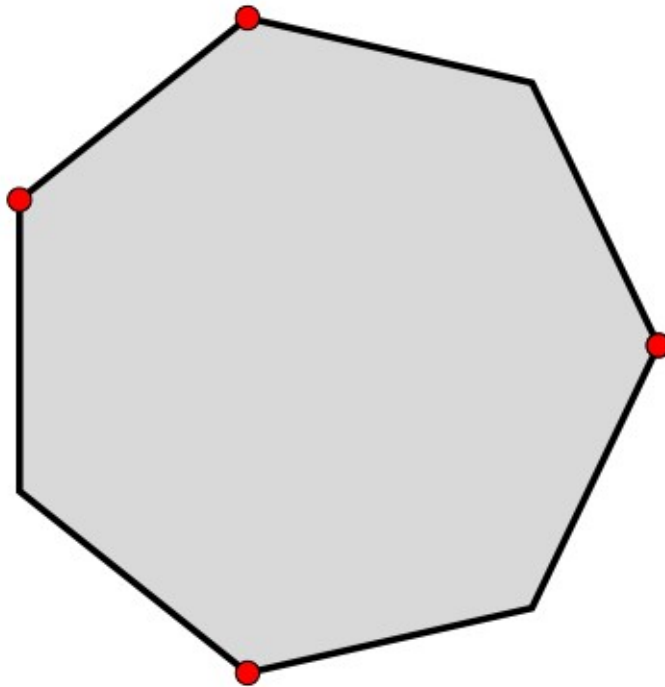
Disegna altre gallerie d'arte ortogonali ed esplorale.

## **Attività 2. Il problema della fortezza**

Immagina una fortezza che abbia la forma di una figura chiusa con lati e angoli dritti. La sfida consiste nel capire come posizionare il minor numero di telecamere (o guardie) all'interno della fortezza in modo che, indipendentemente da dove ti trovi **all'esterno** della fortezza, almeno una telecamera possa inquadrare quel punto.

Proprio come nel problema della galleria d'arte, possiamo posizionare le telecamere solo agli angoli della forma.

Date tutte le fortezze con lo stesso numero di lati, possiamo trovare un numero di telecamere sufficiente per tutte queste fortezze. Questo numero di telecamere è il numero di lati diviso per 2 e il risultato viene arrotondato al numero intero successivo. Quindi, per una figura a 7 lati, avresti bisogno al massimo di 4 telecamere (perché la metà di 7 è 3,5 e abbiamo arrotondato al numero intero successivo 4).



Disegna altre fortezze ed esplora.

### **Contesto matematico e risorse:**

le forme fantasiose della galleria d'arte che abbiamo descritto sopra possono essere descritte matematicamente come " *poligoni* ". Un poligono è una forma semplice e chiusa, formata dall'unione di linee rette. "Semplice" significa che le linee non si intersecano, e "chiuso" significa che le linee si collegano per formare una forma completa, senza spazi vuoti. Ad esempio, un triangolo è un poligono con tre lati dritti, un quadrato è un poligono con quattro lati dritti, mentre una croce non è un poligono. I lati si incontrano in punti, che sono gli angoli della forma. Questi angoli sono anche chiamati vertici.

I triangoli, che sono i poligoni più semplici, possono essere considerati i mattoni fondamentali dei poligoni. È possibile costruire qualsiasi tipo di poligono combinando triangoli diversi. Pertanto, è anche possibile procedere al contrario e trovare i triangoli di cui è composto un poligono. Questo processo di divisione di un poligono in triangoli è chiamato " *triangolazione* ".

Se vuoi saperne di più, ecco un consiglio di lettura: *Art Gallery Theorem and Algorithms* , di Joseph O'Rourke, Oxford, University Press, 1987. Il libro può essere consultato o scaricato [qui](#) .

### **Crea e condividi!**

Condividi le gallerie dei partecipanti e le fortezze che hai creato utilizzando gli hashtag

**#idm314** .

© 2023 Christiane Rousseau

Quest'opera è distribuita con licenza [Deed - Attribution 4.0 International - Creative Commons](#)