Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

MODELLI MATEMATICI SULLA PERCEZIONE DEL COLORE

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
GIOVANNI MONGARDI

Presentata da:
CHIARA BIGUZZI

Anno Accademico 2021-2022

A mia mamma,
Al nonno Pietro

Indice

Introduzione **4**
Introduzione storica 4
Alcuni modelli per gli spazi di colore 16
Introduzione all'opera 23

1 Preliminari **25**
1.1 Connessione e omotopia 25
1.2 Varietà differenziabili 27
1.3 Algebre di Jordan 32

2 Notazioni e terminologia **35**
2.1 Relazione di equivalenza e spazio quoziente 36

3 Assiomi di Schrödinger **38**

4 Omogeneità **40**
4.1 Motivazione unidimensionale all'omogeneità di $\mathcal{P}$ 40
4.2 Omogeneità di $\mathcal{P}$ 41
4.3 Conseguenze dell'omogeneità sulla struttura di $\mathcal{P}$ 42

5 Metriche invarianti **46**
5.1 $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ 46
5.2 $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}$ 47

6 Luminosità **49**
6.1 Differenza di luminosità 49
6.1.1 $\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ 50
6.1.2 $\mathcal{M} \cong SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ 51
6.2 Superfici a luminosità costante 54
6.2.1 $\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ 55
6.2.2 $\mathcal{M} \cong SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ 55

7 Algebre di Jordan e luminosità **57**

8 Appendice **60**

8.1 Tonalità e saturazione 60

8.1.1 $\mathfrak{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 60

8.1.2 $\mathfrak{U} = \mathfrak{h}(2, \mathbb{R})$ 61

8.2 Cenni di analisi delle scene visive 62

8.3 Geodetiche e colori complementari 63

8.4 Un esempio 64

8.5 Un esperimento critico 66

Introduzione

Introduzione storica

Ad oggi le teorie riguardanti la percezione del colore forniscono un importante esempio di come la matematica possa essere applicata alla descrizione di fenomeni fisici e psicofisici. Nonostante ci siano stati pareri che ritenevano impossibile dare una spiegazione analitica a questo problema, si è giunti alla conclusione che una teoria matematica sia fondamentale per comprendere e descrivere questo argomento. Analizzeremo dunque i contributi di alcuni filosofi, matematici e fisici che si sono interessati allo spazio del colore e hanno cercato di darne una descrizione e di formalizzarlo secondo le loro conoscenze fino ad arrivare al 1900, ovvero il periodo in cui H. L. Resnikoff ha iniziato a studiare l'argomento fino alla pubblicazione del documento "Differential Geometry and Color Perception" [Res74] che sarà poi analizzato nel corpo centrale della tesi.

Platone **428/427 a.C. - 348/347 a.C.**

Secondo i documenti arrivati fino a noi, i primi ad essersi occupati dei concetti di luce e colore sono stati i filosofi greci e la prima teoria sull'ottica, nota come *teoria dell'estromissione*, assumeva che vedessimo gli oggetti per merito di un'emanazione simile al fuoco proveniente dai nostri occhi. Platone, nel dialogo "Timeo" , elabora questa idea descrivendo la vista come una forma di contatto tra l'occhio e l'oggetto: durante il giorno il *fuoco visivo* fuoriuscendo dall'occhio incontra la luce diurna, dato che fuoco e luce sono simili, quindi omogenei, scontrandosi producono la vista dell'oggetto. A questi due elementi è aggiunto un terzo *fuoco*, quello emesso dall'oggetto, che è precisamente il suo colore.

> *Ci resta ancora un quarto genere di impressioni che riguarda il sensibile e che bisogna specificare, in quanto contiene in sè numerose varietà. Noi abbiamo chiamato queste, nel loro insieme, colori. Questi sono fiamma proveniente dai singoli corpi, che ha particelle proporzionate alla visione, in modo da generare sensazioni. [...] Ora, per quanto concerne i colori, questo sembra più probabile, e sarebbe opportuno discuterne in un discorso conveniente. Le particelle che provengono dalle altre cose e che incontrano la vista, sono, alcune, più piccole, altre, invece, più grandi; ed*

> *alcune sono uguali alle parti della vista medesima. Ora, le uguali non sono sensibili, e le diciamo diafane; invece, le maggiori e le minori, le une contraendo e le altre dilatando la vista, agiscono come le calde e le fredde sulla carne, e sulla lingua le acerbe e tutte quelle che producono calore e che abbiamo chiamate piccanti. E le bianche e le nere sono fortemente imparentate a queste, producendo le stesse impressioni in un altro genere, e che ci sembrano differenti per le cause precisate. Pertanto, bisogna porre i nomi in questa maniera: ciò che dilata la vista bisogna chiamarlo bianco [leukos], mentre il suo contrario bisogna chiamarlo nero [melas].* [Pla03]

Platone infatti immagina di scomporre la *fiamma* proveniente dai corpi in particelle di dimensioni differenti, in base a questa caratteristica possono verificarsi tre situazioni differenti:

- se le particelle hanno la stessa dimensione di quelle del *fuoco visivo* allora l'oggetto viene percepito come trasparente
- se le particelle dell'oggetto sono più piccole di quelle della vista, l'oggetto appare bianco
- se le particelle dell'oggetto sono più grandi di quelle della vista, l'oggetto appare nero

Al bianco e al nero aggiunge inoltre altri due colori primari che sono: il rosso e il *brillante*; mescolando questi si ottengono altri nove colori: giallo, purpureo, bruno, arancione, grigio, ocra, turchino, celeste, verde.

Aristotele **384/383 a.C. - 322 a.C.**

Contraddicendo la teoria dell'estromissione, Aristotele nelle opere "L'anima", "Sul senso" e "Meteorologia" definisce la luce come la proprietà di una sostanza trasparente dove si ha

> *Chiara trasparente ciò che è visibile, ma, per esprimermi propriamente, non visibile per sé, bensì per mezzo di un colore estraneo* [Ari96]

ovvero un corpo che permette di vedere distintamente attraverso di esso. Esistono quindi due tipi di corpi: *indeterminati*, che non hanno limiti fisici, ovvero quelli che oggi chiamiamo fluidi; *determinati*, i corpi solidi con una forma propria. Per Aristotele ogni corpo è composto dai quattro elementi principali: fuoco, aria, acqua, terra; scritti in ordine decrescente rispetto al grado di trasparenza proprio di ogni elemento. Dal momento che il colore è definito come il limite del diafano in un corpo, si può osservare come questo dipenda dalla percentuale in cui i diversi elementi sono presenti in esso: se in un oggetto la trasparenza è elevata si dice che il colore tende al bianco, quindi il fuoco è bianco;

mentre se è bassa il colore tende al nero, dunque la terra è nera. Aristotele inoltre segue la dottrina di Empedocle, ovvero considera il bianco e il nero ai due estremi della gamma cromatica, mentre tutti gli altri colori si originano dalla mescolanza di essi in tre modalità differenti:

- *giustapposizione*: bianco e nero sono presenti in quantità sufficientemente piccole da risultare invisibili quindi viene percepito un altro colore;
- *sovrapposizione*: bianco e nero vengono stesi l'uno sull'altro, come viene ad esempio fatto dai pittori;
- *mescolanza completa*.

Aristotele definisce quindi sette colori, dove il numero sette è ricondotto dai Pitagorici, che sono: bianco, giallo, rosso, porpora, verde, blu, nero (e grigio).

Cartesio **31 marzo 1596 - 11 febbraio 1650**

La prima teoria che associa colori differenti a stati fisici differenti e classificabili è attribuita a Cartesio. I suoi studi partono dall'osservazione dell'arcobaleno, fenomeno naturale che può essere osservato non solo nel cielo, ma anche ogni volta in cui una goccia d'acqua viene illuminata dal Sole. Su questo è basato l'esperimento che ha portato alla seguente conclusione:

> *And it seems to me that it is very evident from all of this that the nature of the colours consists just in the parts of the subtle matter which transmit the action of light having a much greater tendency to rotate than to travel in a straight line. As a consequence, those which have a much stronger tendency to rotate cause the colour red, and those which have only a slightly stronger tendency cause yellow. [...] For if it is true that the sensation we have of tight is caused by the movement or inclination to movement of some matter touching our eyes, as is indicated by many other things, it is certain that different movements of this matter must cause different sensations in us.* [Des01]

Ovvero ogni colore che percepiamo corrisponde ad uno stato di rotazione e differenti tonalità di colore corrispondono a differenti velocità angolari. Questo darebbe origine ad un isomorfismo tra lo spazio due-dimensionale dei colori in cui variano tonalità e saturazione e l'intervallo reale in cui ogni valore identifica le varie velocità angolari. Inoltre Cartesio rifiuta la distinzione che i filosofi precedenti avevano fatto tra colori primari (veri) e colori secondari (falsi o apparenti), secondo lui l'intera natura dei colori si basa solo sulla loro apparenza.

Hooke **18 luglio 1635 - 3 marzo 1703**

Hooke contraddisse la teoria di Cartesio, nel 1665 in "Micrografia". I suoi studi si basarono sull'osservazione degli anelli di colore che si formano quando la luce si scontra in un sottile strato di aria compreso tra due piatti trasparenti paralleli, che spesso sono chiamati piatti di *Muscovy glass*. Concluderà poi che la luce deve propagarsi lungo un'onda e che i colori si originano nel momento in cui l'onda della luce si scontra con la superficie non perpendicolarmente, ovvero a causa di riflessione e rifrazione. I colori quindi possono essere identificati con l'insieme dei reali, parametrizzati secondo la tangente dell'angolo che forma l'onda con la superficie incidente

Newton **25 dicembre 1642 - 20 marzo 1726**

Nel 1671 Newton pubblicò i risultati del suo esperimento sulla scomposizione di un raggio di luce attraverso un prisma, decomponendola così nelle sue componenti spettrali principali, sostenendo le sue conclusioni con calcoli quantitativi. Convertì infatti il suo studio in una camera oscura lasciando entrare soltanto un raggio di luce attraverso un foro; l'innovazione consistette nell'uso di due prismi consecutivi dimostrando, non solo che la luce poteva essere scomposta nelle sue componenti, ma anche che la decomposizione trovata era unica e si manteneva costante in caso di ulteriori decomposizioni.

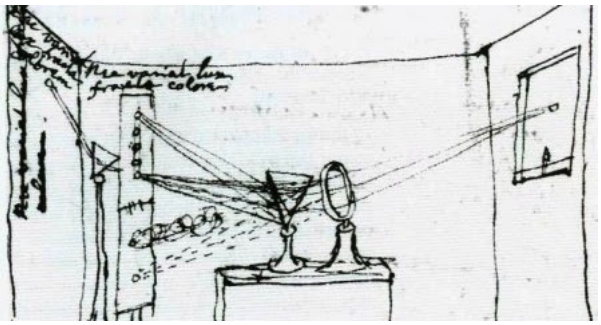

Figura 1: schizzo dell'esperimento di scomposizione della luce fatto da Newton

Newton dunque concluse che i colori spettrali hanno la proprietà di essere percepiti come colori *puri* non attenuati nella loro saturazione. A partire da ciò decise di organizzare geometricamente i colori, anche in analogia con l'ottava musicale, in un cerchio suddiviso in sette sezioni. Ogni colore venne quindi identificato con la sua posizione radiale indicata con z; al centro del disco, indicato con O, Newton posizionò i colori dal bianco al nero con tutte le sfumature di grigio, sul bordo esterno vennero indicati i colori spettrali, quindi man mano che ci si sposta verso il bordo del disco la saturazione aumenta. Definì inoltre la saturazione come la *distanza dal bianco* e la quantità come quella che oggi consideriamo tinta del colore.

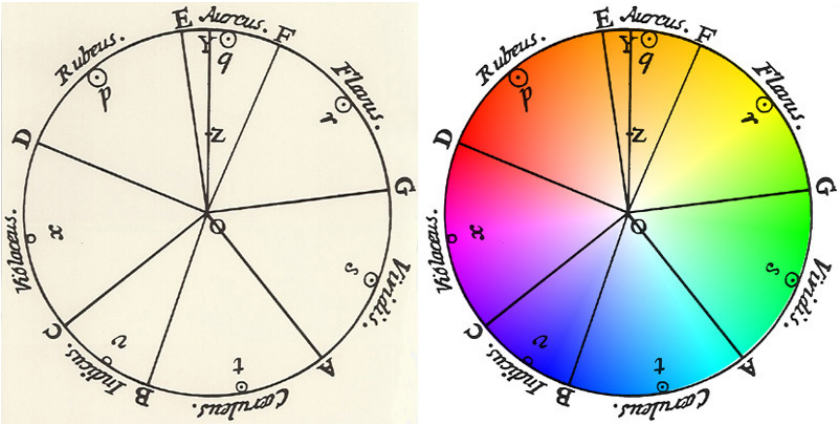

Figura 2: rappresentazione del cerchio cromatico di Newton

Newton identificò lo spazio delle luci fisiche con il sottoinsieme delle funzioni nello spazio di Hilbert delle funzioni non negative e integrabili, ovvero un cono aperto in uno spazio vettoriale di dimensione infinita; in contraddizione sia con la teoria di Aristotele che con quella di Hooke. Inoltre, a partire dalle osservazioni fatte sul disco, si deduce che un colore dipende da tre variabili: quantità, tonalità e saturazione, da cui segue nuovamente che lo spazio ottenuto sia una varietà euclidea tridimensionale che può essere identificata con la coppia (α, z) dove z denota la coordinata nel disco di Newton mentre α denota la quantità, ovvero un cono nello spazio euclideo tridimensionale. La teoria della luce e del colore proposta da Newton alla fine del suo libro è corpuscolare, ma molto più complessa di quella considerata di solito: i flussi di particelle dei diversi colori sono modulati da perturbazioni periodiche; questo può essere ritenuto come uno dei primi esempi di teoria dualistica onda-corpuscolo, che porterà grandi confronti negli anni successivi.

Goethe **28 agosto 1749 - 22 marzo 1832**

Goethe ha espresso un netto disappunto nei confronti del pensiero di Newton, che aveva tentato di ridurre i colori alla pura matematica, accusandolo di aver commesso un errore al pari di chi cercava di dividere Dio in tre. Nel suo libro "Teoria del colore" infatti scrive:

> *Ma come io rimasi stupito, come guardando un muro bianco attraverso il prisma, esso era rimasto bianco! Che solo soltanto osservando da qualche zona buia, esso mostrava un certo colore, poi finalmente, attorno al davanzale della finestra tutti i colori brillavano [...] Non ci volle molto tempo che io capii che c'era qualcosa di significativo sul colore che doveva essere compreso, e io ho parlato d'istinto ad alta voce, [dicendo] che gli insegnamenti di Newton erano falsi* [Goe97]

mostrando che il fatto di vedere la scomposizione della luce avvenisse in una situazione singolare, su cui, quindi, non si poteva basare tutta la teoria. Afferma come la non percezione dei colori al buio non possa essere usata a sostegno della tesi di Newton: i colori sono componenti della luce bianca. Osserva inoltre che non esistono colori primari e secondari, ma ogni colore consiste semplicemente nell'offuscamento della luce: è il rapporto duale tra luce e oscurità a generare i colori. Lo studio di Goethe nella sua opera non riguarda il lato matematico dell'argomento ma la percezione fisica e sensoriale dei colori da parte dell'uomo, inoltre contiene alcune delle prime descrizioni pubblicate sui fenomeni di ombre colorate, rifrazione e aberrazione cromatiche. Questo causò numerose critiche da parte dei matematici successivi ma esercitò una grande influenza su molti degli artisti contemporanei.

Young **13 giugno 1773 - 10 maggio 1829**

A partire dalla teoria ondulatoria della luce, Young dedusse che la natura tricromatica dello spazio dei colori non fosse dovuta ad una proprietà fisica della luce, ma alla natura biologica dei nostri occhi; ipotizzò quindi che la retina dovesse contenere tre recettori nervosi differenti che reagiscono in modo diverso alla luce.

> *Now, as it is almost impossible to conceive each sensitive point of the retina to contain an infinite number of particles, each capable of vibrating in perfect unison with every possible undulation, it becomes necessary to suppose the number limited, for instance, to the three principal colours, red, yellow, and blue.*

Questa teoria verrà da lui esposta nel 1801 alla Royal Society di Londra, durante il suo intervento sulla teoria ondulatoria della luce, in contrapposizione con quella corpuscolare proposta da Newton. Young rifletté a lungo, non sul numero di fotorecettori dell'occhio, su quali fossero i pigmenti associati ai tre recettori: inizialmente pensò che fossero i colori primari dei pittori, giallo, rosso, blu; teoria che poi cambiò in rosso, verde, viola. Per quanto la sua teoria sembrasse ardita quando fu proposta, attorno al 1820, il fatto che l'incapacità di John Dalton di percepire il colore rosso potesse essere spiegata come l'assenza di uno dei tre recettori, spinse altri fisici a dare credito a questa ipotesi. Infatti oggi sappiamo che nella retina del nostro occhio sono presenti tre fotorecettori detti coni, che reagiscono alla luce in modo differente.

Helmholtz **31 agosto 1821 - 8 settembre 1894**

Helmholtz ritenne fin da subito la teoria di Newton che suddivideva lo spazio dei colori in sette sezioni (la cui ampiezza corrispondeva alla durata delle note nella scala musicale) arbitraria e senza un significato matematico intrinseco, in quanto lo spettro dei colori è da considerare continuo. Nel 1850, incuriosito dall'ipotesi di Young riguardante la tricromia della percezione del colore, incominciò a fare esperimenti per verificarne la validità, da

cui dedusse che i colori primari dovessero essere cinque e non tre. Per prima cosa face una netta distinzione tra colori intesi come luce, le cui onde con diverse frequenze una volta sovrapposte si sommano per interferenza, e colori intesi come pigmenti, che assorbono la luce e se mescolati riflettono ancora meno luce. A seguito dell'intervento di Maxwell sull'argomento rivalutò il lavoro di Young, questa volta concordandone, e propose un grafico per l'assorbimento dei tre recettori nella retina; oggi infatti la teoria è nota con il nome di "Teoria tricromatica di Young-Helmholtz" . Inoltre nel 1891 propose una prima idea di definizione formale per la distanza percettiva tra i colori. Tra i suoi interventi relativi a questa teoria è nota anche l'accusa nel 1853 a Goethe, ritenendo che non possedesse le conoscenze adeguate per poter proporre una teoria, dal momento che non presentò nemmeno un'ipotesi da verificare.

Maxwell **13 giugno 1831 - 5 novembre 1879**

Nel 1859 Maxwell espose la sua teoria sullo spazio dei colori, che viene spesso considerata come l'origine della colorimetria, ovvero la misura del colore. Egli riprodusse il fenomeno della riproduzione dei colori attraverso la sovrapposizione di luci utilizzando una costruzione meccanica oggi nota come "ruota di Maxwell".

Figura 3: ruota di Maxwell

Ad oggi sappiamo che questo fatto è reso possibile dal fatto che la trasmissione del colore non passa istantaneamente dalla retina al cervello, quindi, se la ruota gira ad una velocità sufficiente, i colori si fondono insieme creando una nuova tonalità. Cambiando le proporzioni dei colori nella ruota, riuscì a creare dei diagrammi, "triangoli di Maxwell", con cui era possibile ottenere tutte le sfumature dei colori a partire da quelli primari di Young: verde, blu e rosso. La teoria più importante sviluppata da Maxwell riguarda l'elettromagnetismo, da cui segue che la luce può essere pensata come un'onda elettromagnetica che, a seconda della frequenza dell'oscillazione si può classificare in: onde radio, microonde, raggi infrarossi, luce visibile, raggi ultravioletti, raggi X, raggi gamma. L'oc-

chio umano è in grado di percepire solo le radiazioni con una lunghezza d'onda compresa tra i 380nm e i 780nm. Si deduce quindi che il prisma di Newton permette di scomporre le varie componenti della luce attraverso la rifrazione.

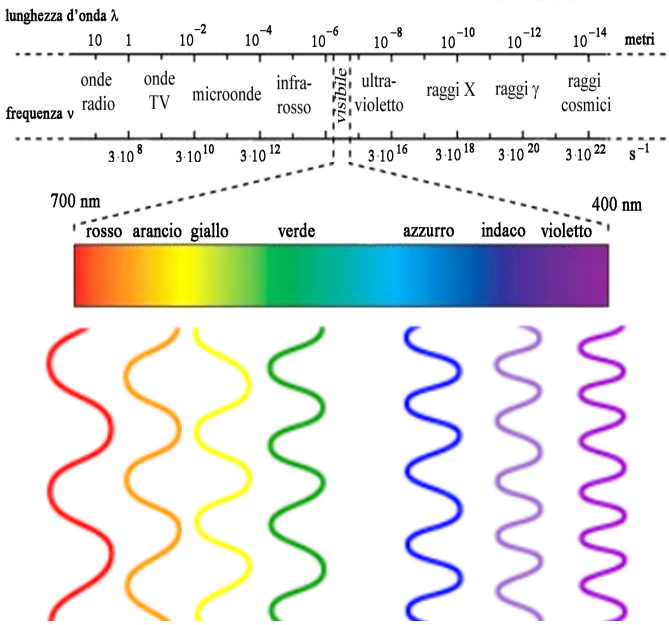

Figura 4: Spettro elettromagnetico e luce visibile

Fechner **19 aprile 1801 - 18 novembre 1887**

Fechner, che può essere considerato il fondatore della psicofisica, si interessò al problema mente-corpo, prima di descriverle scientificamente, però, aveva bisogno di poter misurare oggettivamente le variabili mentali. Scelse dunque come unità di misura per l'intensità fisica della luce le candele al metro quadrato; mentre le corrispondenti sensazioni vennero misurate in base al numero di soglie differenziali a cui si trova la corrispondente intensità fisica, spesso indicato anche come JND (*just noticeable difference*, differenza appena percettibile). Partendo dalla legge formulata da Weber

$$\frac{\Delta I}{I} = k$$

dove ΔI è la soglia differenziale, I è l'intensità dello stimolo di riferimento e k è la costante di Weber, variabile a seconda di cosa si misura. A partire da questa legge, Fechner derivò in modo analitico un modello per la funzione psicofisica, ottenendo: $\mathrm{d}s = c\frac{\mathrm{d}I}{I}$; dove $\mathrm{d}s$ indica la variazione nella sensazione percepita, I è l'intensità fisica, $\mathrm{d}I$ la sua variazione e c è un parametro che dipende sia dalla costante di Weber che dall'unità di misura scelta. Integrando questa equazione si ottiene $s = c \log I + C$ dove C è la costante di

integrazione che vale $C = -c \log I_0$, dando così la seguente espressione nota come Legge di Weber-Fechner:

$$s = c \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

ovvero l'intensità percepita é direttamente proporzionale al logaritmo dell'intensità fisica.

Grassmann **15 aprile 1809 - 26 settembre 1877**

Grassmann, noto per aver posto le basi per la formalizzazione dell'algebra lineare, a seguito di alcuni test di percezione visiva, pubblicò delle leggi riguardanti l'ottica che costituiscono la base della teoria del colore, tenute in considerazione anche dalla CIE (vedi pagina 18) [Kra75]:

equivalenza definendo la relazione $\sim$ nello spazio dei colori $\mathcal{P}$ come $a \sim b$; $a, b \in \mathcal{P}$ se sono percepiti uguali come colori, questa è di equivalenza: considerando $a, b, c \in \mathcal{P}$ si ha

1. $a \sim a$
2. se $a \sim b$ allora $b \sim a$
3. se $a \sim b$ e $b \sim c$ allora $a \sim c$

additività per ogni $a, b, c \in \mathcal{P}$ si ha: $a \sim b$ se e solo se $a + c \sim b + c$; dove con $+$ si intende la somma fisica di due luci

moltiplicazione scalare per ogni $a, b \in \mathcal{P}$ allora $a \sim b$ implica $t \cdot a \sim t \cdot b$

tricromia che può essere enunciata in due modi differenti

1. per ogni $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$ esistono t_i, u_i, $i = 0, 1, 2, 3$, numeri reali positivi con $t_i \neq u_i$ per almeno un i tali che $\sum_{i=0}^{3} t_i \cdot a_i \sim \sum_{i=0}^{3} u_i \cdot a_i$
2. per ogni a_1, a_2, a_3 se esistono t_i, u_i, $i = 1, 2, 3$, numeri reali positivi che soddisfano $\sum_{i=1}^{3} t_i \cdot a_i \sim \sum_{i=1}^{3} u_i \cdot a_i$ allora $t_i = u_i$ per ogni i

da cui si può dedurre che una combinazione convessa di colori è a sua volta un colore. Ricordando che Newton aveva dedotto che lo spazio dei colori fosse un cono in uno spazio tridimensionale, si può ora assumere che quel cono debba essere anche convesso.

Hering **5 agosto 1834 - 26 gennaio 1918**

Hering, nelle sue ricerche riguardanti la visione del colore, propose una visione del colore fuori dagli schemi di quell'epoca ovvero la "teoria dei colori opponenti" con quattro colori primari e non più tre. A partire dall'idea che il bianco è l'opposto del nero, deve esserci una sostanza percepibile alla vista che, assimilata, appare bianca, mentre non assimilata appare nera, dunque il grigio viene visto quando c'è equilibrio tra bianco e nero. Vengono così introdotte altre due sostanze visive: una che, se assimilata, produce la sensazione di rosso, mentre se non lo è viene percepita come verde; l'altra che, se assimilata, produce la sensazione di giallo mentre se non lo è viene percepita come blu.

> These colors have nothing at all to do with the specific fibers which correspond with red, green and violet. Because if the specific function of one sort of fiber is to produce the sensation of red, and of the other the sensation of green, how can we suddenly see yellow when the specific red- and green-sensitive fibers are equally activated? Surely the sensations of yellow and blue have as much right to a specific quality as red or violet? It would be just as unreasonable to say that there are nerve fibers which are sensitive to sour and to salt, but that we taste bitter when both of these are stimulated equally and at the same time. [Cro99]

Hering quindi propose uno spazio quadrato agli angoli del quale ci sono rosso, giallo, verde e blu; si soffermò particolarmente sul fatto che un colore non può essere contemporaneamente tendente al rosso o al verde, così come non contemporaneamente al giallo e al blu; da cui segue che i colori che si trovano lungo una diagonale del quadrato si escludono a vicenda.

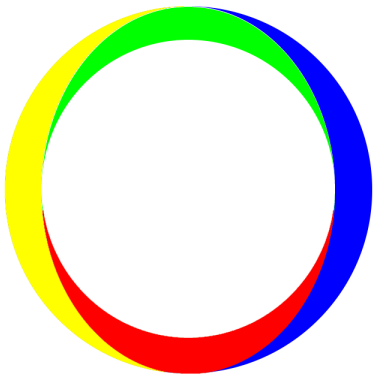

Figura 5: rappresentazione alternativa dello spazio dei colori secondo Hering

Hering inoltre considera tre gruppi polari: bianco-nero, rosso-verde, giallo-blu; da cui segue che lo spazio dei colori può comunque essere visto come tridimensionale, dove ogni gruppo polare costituisce un asse, ovvero:

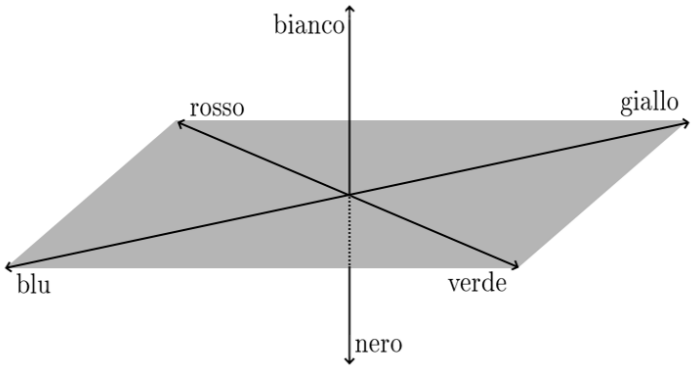

Figura 6: spazio tridimensionale standard in cui sono inserite le coordinate del colore

Schrödinger **12 agosto 1887 - 4 gennaio 1961**

Nel 1820 pubblicò una serie di articoli sulla teoria del colore con l'obiettivo di riassumere e formalizzare tutti quelli che erano stati i contributi fino a quel momento, egli ritiene infatti che il colore non può essere visto soltanto come un fenomeno fisico ma deve anche essere studiato attraverso precise formulazioni matematiche. Schrödinger osservò come dalle teoria di Newton possiamo dedurre che lo spazio dei colori non può che essere un cono, a cui Grassmann poi aggiungerà la proprietà di convessità; non mancò inoltre di dare il suo contributo, affermando che il vertice del cono esiste e deve essere occupato dal colore nero. Infine la teoria tricromatica consente di asserire che la dimensione dello spazio è tre. Schrödinger unì tutte queste osservazioni in una teoria detta assiomatica che sarà affrontata nel capitolo 3.

Wright **9 marzo 1917 - 29 novembre 1997**
Guild **5 settembre 1906 - 21 novembre 1993**

Wright e Guild sono stati fisici e colorimetri britannici che hanno svolto contemporaneamente esperimenti riguardanti il *color matching*: l'obiettivo era provare di poter rappresentare una luce percepita x_1 come somma di tre stimoli differenti detti primari con differenti intensità ovvero $x_1 \equiv \mathrm{r}_1 \{R_{ed}\} + \mathrm{g}_1 \{G_{reen}\} + \mathrm{b}_1 \{B_{lue}\}$. Determinando così le funzioni $\mathrm{r}(\lambda), \mathrm{g}(\lambda), \mathrm{b}(\lambda)$ che rappresentano l'intensità relativa delle luci primarie necessarie per ricreare il colore mostrato ad una determinata lunghezza d'onda, queste funzioni sono leggermente differenti per ogni osservatore in quanto dipendono direttamente dai coni della loro retina, unici per ogni individuo. Da ciò dovrebbe poi seguire sperimentalmente la proprietà additiva:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \equiv \mathrm{r}_1 \{R\} + \mathrm{g}_1 \{G\} + \mathrm{b}_1 \{B\} \\ x_2 \equiv \mathrm{r}_2 \{R\} + \mathrm{g}_2 \{G\} + \mathrm{b}_2 \{B\} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 \equiv (\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2) \{R\} + (\mathrm{g}_1 + \mathrm{g}_2) \{G\} + (\mathrm{b}_1 + \mathrm{b}_2) \{B\}$$

17 osservatori in totale, 10 esaminati da Wright e 7 da Guild, sono stati sottoposti al loro esperimento che può essere schematizzato attraverso la seguente figura: ogni osservatore osservava contemporaneamente due luci proiettate su uno sfondo bianco, una data dal test quindi corrispondente ad una determinata frequenza λ, l'altra controllata da lui regolando la quantità di colori primari fino ad ottenere un colore percepito uguale a quello del test.

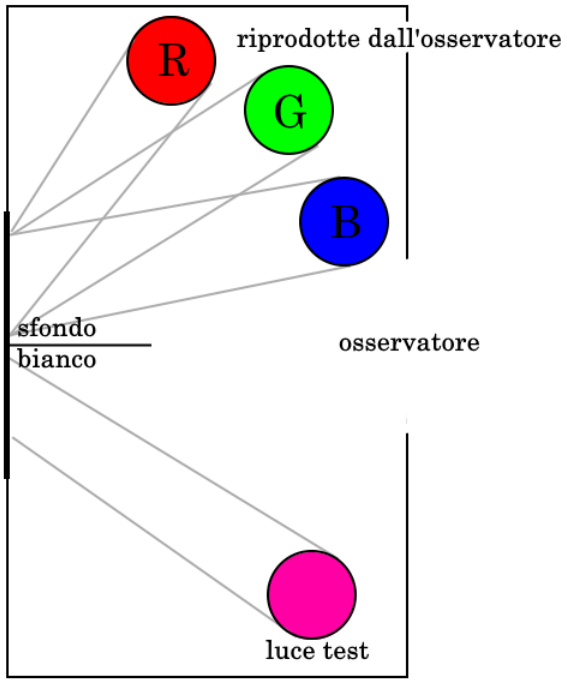

Figura 7: schema dell'esperimento svolto da Wright e Guild

Ad ogni osservatore venivano sottoposti circa trenta test corrispondenti a lunghezze d'onda differenti lungo lo spettro, venivano poi organizzati i dati in un grafico composto dalle tre funzioni $\mathrm{r}(\lambda), \mathrm{g}(\lambda), \mathrm{b}(\lambda)$ ottenute per interpolazione sui dati ottenuti. Nell'immagine sottostante è riportato il grafico ottenuto da Wright in cui ogni funzione è rappresentata dieci volte, una per ogni osservatore: le differenze, sono dovute non solo ad errori casuali degli osservatori e sistematici della strumentazione, ma anche alle differenze di percezione visive di ogni osservatore.

Un'altra osservazione sui risultati ottenuti riguarda la funzione $\mathrm{r}(\lambda)$ che assume anche valori negativi; infatti è stato osservato che, contro ogni aspettativa, i tre colori primari non erano in grado di generare tutto lo spettro del visibile. Per portare a termine l'esperimento è stato quindi necessario mettere una luce rossa regolata dall'osservatore vicino alla luce test in modo da poterle aggiungere una componente rossa e rendere così

possibile eguagliare i due stimoli. In questo modo vengono introdotte quindi le frequenze negative delle luci spettrali; da ciò possiamo dedurre che non possono esistere i tre colori primari così come li abbiamo sempre immaginati, ma almeno uno di essi deve essere immaginario, ovvero deve corrispondere a frequenze negative.

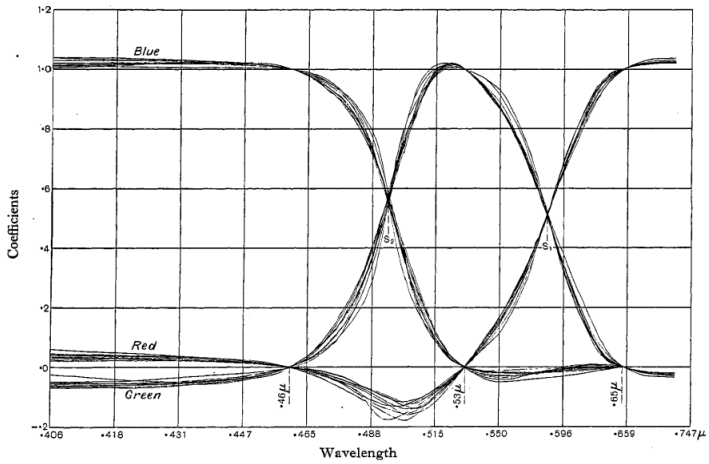

Figura 8: grafico con le curve dei coefficienti di 10 osservatori sovrapposte

Alcuni modelli per gli spazi di colore

Un modello per lo spazio del colore è un modello matematico che riesce in tempi molto brevi a convertire una luce colorata in tre componenti che la identificano in modo univoco; la scelta delle componenti è proprio quella che li differenzia l'uno dall'altro. Principalmente i colori si distinguono per tre proprietà: luminosità, tonalità e saturazione, la prima è chiamato anche luminanza mentre le altre due sono considerate la coppia della crominanza. È stato necessario trovare un modello nel momento in cui ha iniziato a svilupparsi la fotografia digitale, in quanto oggi le sue applicazioni (come la grafica computerizzata, la visione artificiale, la televisione) sono fondamentali nella vita di tutti i giorni. Analizzeremo dunque quelli che al momento sono i modelli più utilizzati soffermandoci particolarmente su quelli proposti dalla CIE in quanto sono muniti anche di una metrica che misura la distanza percepita tra due colori distinti.

Munsell color space

Questo modello prende il nome dal suo creatore Albert H. Munsell, è rappresentato da una forma cilindrica con tre dimensioni, così come la maggior parte dei modelli, che corrispondono a: valore, misurato nell'intervallo $[0, 10]$ dove 0 corrisponde al nero e 10 al bianco; tonalità che varia tra 1 e 10 intesi come numeri naturali, dove ogni numero

corrisponde ad un settore della circonferenza identificato da un colore o da una coppia di colori; *croma* o saturazione che varia da 0 a 12.

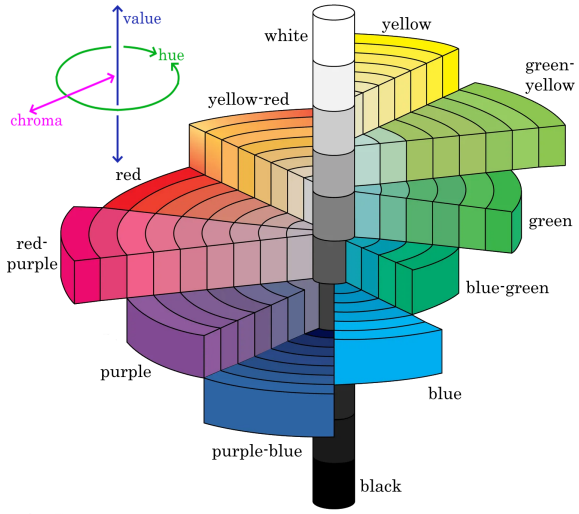

Figura 9: spazio di Munsell

LMS

L'occhio umano normalmente ha tre tipi di coni della retina ognuno in grado di percepire lunghezze d'onda differenti; sono denominati S *short* con un picco in $\lambda = 420nm - 440nm$, M *middle* con picco in $\lambda = 530nm - 540nm$, L *long* con picco in $\lambda = 560nm - 580nm$.

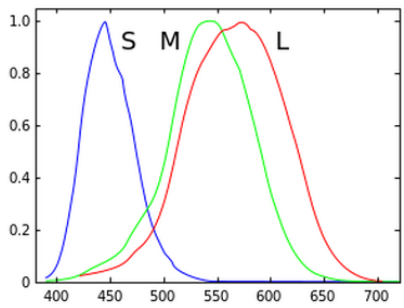

Figura 10: funzioni normalizzate che rappresentano lo spettro di reazione alle diverse lunghezze d'onda dei tre coni

Lo spazio LMS rappresenta la risposta dei tre tipi di coni dell'occhio umano, lo si usa principalmente per eseguire l'adattamento cromatico o per studiare il daltonismo.

CIE

La "Commissiom Internationale de l'Éclairage" abbreviata con l'acronimo CIE, in italiano "Commissione internazionale dell'illuminazione", è stata fondata nel 1913 a Berlino ed oggi ha sede a Vienna, è un'organizzazione indipendente e non profit i cui obiettivi principali sono:

> *To provide an international forum for the discussion of all matters relating to the science, technology and art in the fields of light and lighting and for the interchange of information in these fields between countries.*
>
> *To develop basic standards and procedures of metrology in the fields of light and lighting.*
>
> *To provide guidance in the application of principles and procedures in the development of international and national standards in the fields of light and lighting.*
>
> *To prepare and publish standards, reports and other publications concerned with all matters relating to science, technology and art in the fields of light and lighting.*
>
> *To maintain liaison and technical interaction with other international organizations concerned with matters related to the science, technology, standardization and art in the fields of light and lighting.*

È questa associazione ad aver proposto alcuni tra i più utilizzati spazi del colore ed è anche nota per aver fornito per ognuno di essi una metrica che consente di esprimere la distanza percepita tra due colori. A proposito di questa ci sono pareri discordanti: è stato scelto di non sviluppare e implementare con teorie matematiche accurate i loro spazi continuando a propendere verso una metrica euclidea che però non è conforme ai risultati sperimentali ottenuti.

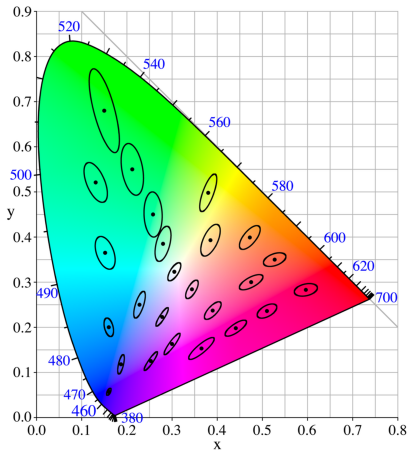

Figura 11: ellissi di McAdam dei colori percepiti come equivalenti; [Mac42]

Come si può osservare dall'immagine precedente, le ellissi rappresentano le porzioni di spazio percepite come lo stesso colore, se la metrica euclidea fosse appropriata, le ellissi sarebbero dovute essere tutte delle circonferenze. Alcuni tra i pareri più disprezzanti di questo metodo di lavoro sono qui riportati:
Edoardo Provenzi: " *Il risultato fu, per utilizzare un eufemismo, quantomeno deludente: la CIE decise di mantenere testardamente una metrica Euclidea col compromesso di modificare le coordinate cromatiche in un modo euristico ed esclusivamente sulla base dell'interpolazione sperimentale. La conseguenza è un modello, chiamato CIELab, "aggiustato" con parametri che arrivano fino alla quarta cifra decimale, con buona pace delle cifre significative e dell'analisi di propagazione degli errori che chiunque può studiare al primo o secondo anno di scuola superiore.*"
Jan Koenderink: "*L'attuale standard industriale, lo spazio CIELab, è un misto imbarazzante di colorimetria e definizioni arbitrarie [...] pieno di numeri magici e funzioni ad-hoc. Tuttavia, abbastanza comunemente, la gente confonde questo con la scienza!*

CIE RGB

Questo è uno dei primi modelli definiti dalla CIE nel 1931; è stato creato a partire dagli esperimenti di Wright e Guild ed è uno dei tanti spazi RGB. Le funzioni ottenute dai due fisici colorimetrici $\mathrm{r}(\lambda), \mathrm{g}(\lambda), \mathrm{b}(\lambda)$, come mostrato a pagina 14, furono usate per definire l'*osservatore standard*. Ogni colore ad una determinata frequenza è quindi descrivibile mediante una combinazione lineare dei tre colori primari, rosso, verde e blu, dove i coefficienti sono dati dalle tre funzioni precedenti. Gli spazi RGB vengono usati principalmente dalle applicazioni per processare, analizzare e memorizzare le immagini, dal momento che esse non devono essere soggette a trasformazioni per essere mostrate. Questo spazio può essere rappresentato come in figura:

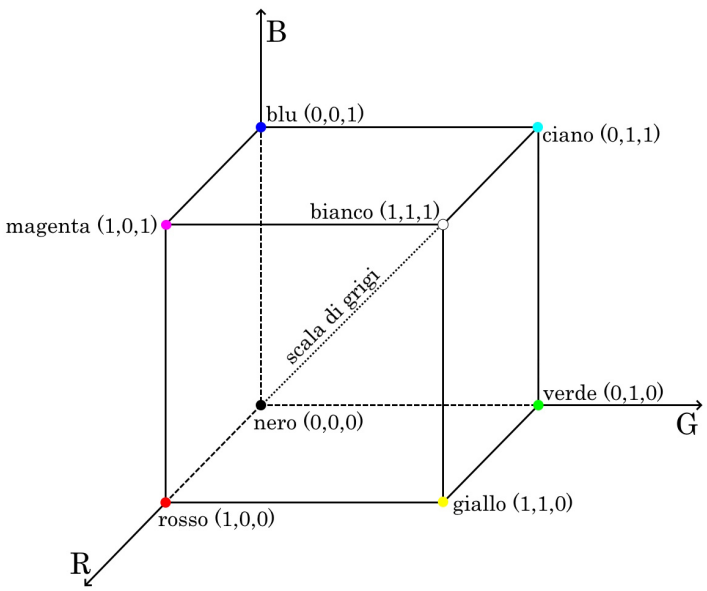

Figura 12: cubo normalizzato $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ dello spazio dei colori

CIE XYZ

Lo spazio XYZ è ottenuto linearmente a partire da RGB in modo da ottenere le tre funzioni principali $\mathrm{x}(\lambda), \mathrm{y}(\lambda), \mathrm{z}(\lambda)$ a termini non negativi. In questo modello Y rappresenta la luminanza, Z corrisponde quasi ugualmente a B mentre X è ottenuta come combinazione lineare di $\mathrm{r}(\lambda), \mathrm{g}(\lambda), \mathrm{b}(\lambda)$. L'applicazione lineare che consente la conversione tra i due spazi è definita come segue:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49000 & 0.31000 & 0.20000 \\ 0.17697 & 0.81240 & 0.01063 \\ 0.00000 & 0.010000 & 0.99000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

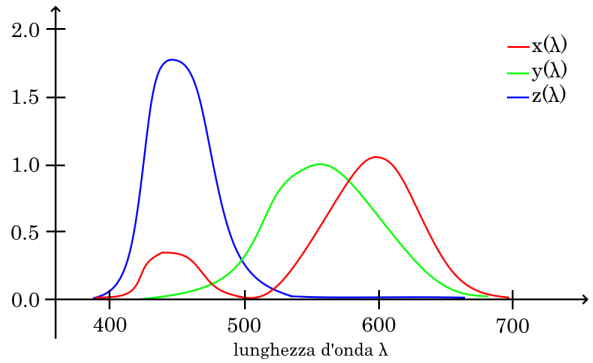

Figura 13: tre funzioni per il *color matching* nello spazio XYZ

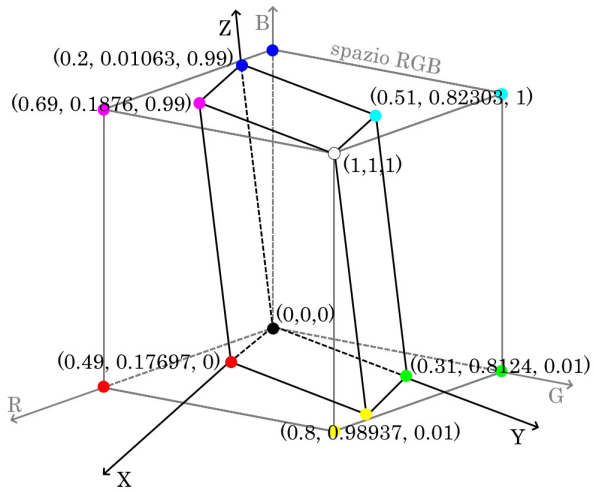

Figura 14: rappresentazione dello spazio XYZ mostrando il legame con lo spazio RGB

CIE L*u*v*

Questo è il primo spazio uniforme proposto dalla CIE, dove con uniforme si intende che la distanza geometrica tra due punti rappresenta la distanza percepita tra i due colori. In questo caso L* rappresenta la luminosità, u* la saturazione e v* la tonalità.

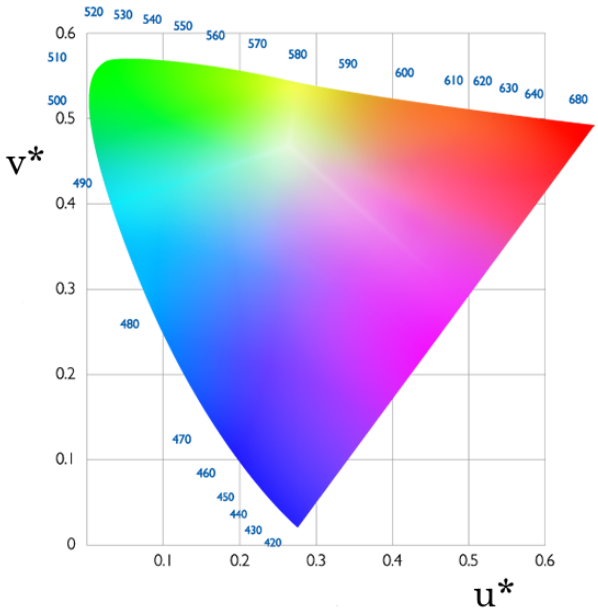

Figura 15: rappresentazione dello spazio CIEL*u*v*

CIE L*a*b* (CIELab)

CIELab è il secondo modello omogeneo a cui si riferivano i due studiosi del colore precedentemente citati, i suoi principali utilizzi riguardano i desktop dei computer e in generale gli schermi digitali. La componente L* indica la luminosità variabile tra 0 (nero) e 100 (bianco), a* rappresenta la saturazione che per valori positivi tende al rosso e per valori negativi al verde, b* rappresenta la tonalità che per valori positivi tende al giallo e per valori negativi al blu. È munito di una metrica euclidea opportunamente aggiustata mediante interpolazione sperimentale al fine di rispettare il più possibile i dati visivi; infatti è usato principalmente sia per valutare la differenza percepita tra due colori e per i sistemi di *color matching* che per buona parte dei programmi per le arti grafiche e digitali.
L'idea portata avanti da Provenzi è quella che, se si potesse migliorare questo metodo fino a renderlo conforme alle teorie matematiche attuali sullo spazio del colore, si avrebbe un più semplice utilizzo della tecnologia, meno costosa e inquinante. Si potrebbero inoltre perfezionare le tecniche di compressione di immagini e file video con un enorme vantaggio energetico. La sua proposta è supportata dal fatto che il nostro sistema visivo ha delle capacità molto più avanzate

di quelle degli algoritmi ad oggi utilizzati quindi c'è molto margine di miglioramento.
La seguente immagine illustra lo spazio CIELab:

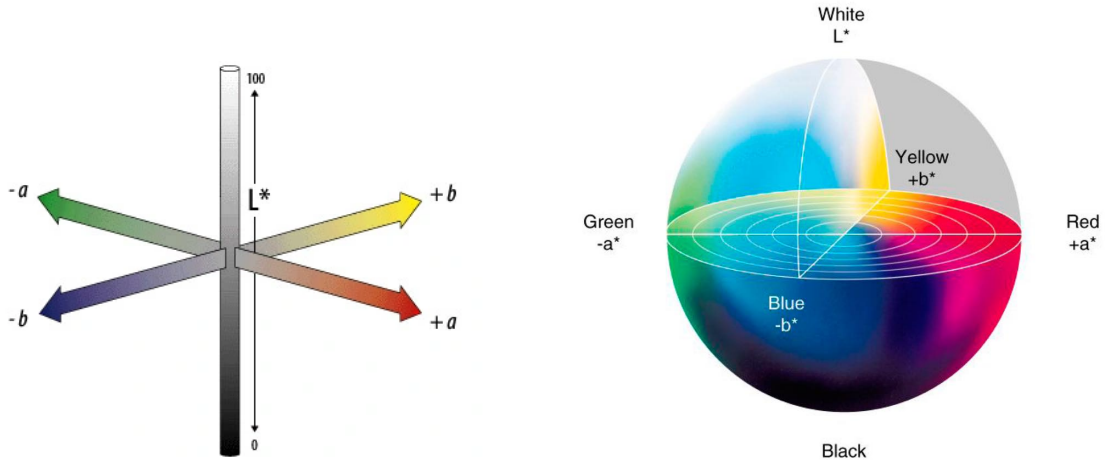

Figura 16: due rappresentazioni differenti dello spazio CIEL*a*b*

CMY(K)

Il modello dello spazio CMY(K) è di tipo sottrattivo con cui si intende il fatto che sfrutta le proprietà dei pigmenti di colore e non delle luci che quindi se mescolati assorbono più lunghezze d'onda: se in sintesi additiva sovrapponendo tutte le luci primarie si ottiene il bianco in sintesi sottrattiva mischiando tutti i pigmenti primari si ottiene il nero. Questo modello sfrutta i colori complementari ciano, magenta e giallo a cui è aggiunto il nero a volte, che è usato principalmente per le stampanti. La trasformazione che permette il cambiamento di coordinare da RGB a CMY è:

$$Ciano = 1 - Rosso$$
$$Magenta = 1 - Verde$$
$$Giallo = 1 - Blu$$

Famiglia degli spazi del colore HSI

I modelli di colore HSI (HSI, HSL, HSV) sono basati sull'idea della percezione visiva umana e i loro principali utilizzi sono la grafica e la visione digitale, l'analisi e il design delle immagini e i software di editing per immagini e video.

HSI

L'importanza di questo modello dipende da due aspetti principali: la componente I (intensità) è separata dalle componenti della crominanza H (tonalità) e S (saturazione), le ultime

due componenti dipendono solo da come l'occhio umano percepisce lo spettro dei colori. La conversione dallo spazio RGB a quello HSI è effettuata come segue:

$$I = \frac{1}{3}(R+G+B)$$

$$S = 1 - \frac{3}{R+G+B}\min(R,G,B)$$

$$H = \cos^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}\left[(R-G)+(R-B)\right]}{\sqrt{(R-G)^2+(R-B)(G-B)}}\right\} \text{ se B>G allora H=}2\pi\text{-H}$$

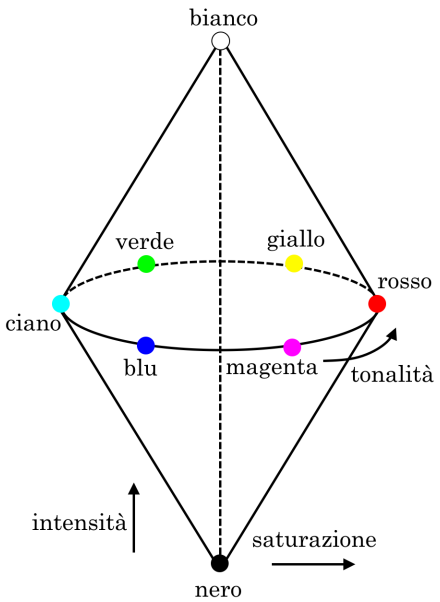

Figura 17: rappresentazione dello spazio HSI

Introduzione all'opera

Nel 1974 il matematico Howard Leonard Resnikoff pubblicò l'articolo "Differential geometry and color perception" in cui propose due modelli per lo spazio del colore muniti entrambi di una metrica adeguata: $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, isomorfo agli spazi tridimensionali proposti nella sezione precedente e munito di una metrica euclidea; $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^* \times \frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}$. Il secondo spazio trovato con estremo rigore matematico è quello che rende così originale e innovativo il suo lavoro, in quanto si tratta di uno spazio iperbolico munito di una metrica non euclidea, assolutamente controcorrente rispetto a tutte le idee precedenti.

I recenti studi psicofisici propendono a considerare più corretto e simile alla percezione umana il secondo modello, che è stato quindi studiato con più attenzione,sia migliorandolo con le conoscenze attuali della meccanica quantistica [Ber20], sia correggendo qualche imprecisione, che seppur presente non influenza le conclusioni raggiunte.

L'obiettivo di questa tesi è, dunque, analizzare l'articolo scritto da Resnikoff, ripercorrendo le scelte matematiche che lo hanno portato alle conclusioni precedentemente citate correggendo eventuali inesattezze e anche spiegando più dettagliatamente possibile i procedimenti da lui eseguiti.

La scelta di questo argomento è stata piuttosto casuale, da appassionata, sia di arte, che di matematica mi sono imbattuta in una serie di articoli dal nome "La matematica del colore" pubblicati da Edoardo Provenzi nel sito *"MaddMaths!"* [Pro21] in cui veniva messo in luce il lavoro svolto da Resnikoff sottolineandone la sua importanza in numerosi ambiti. Ho deciso quindi di informarmi meglio e non ho trovato modo migliore di farlo se non attraverso la mia tesi di laurea.

La tesi è articolata in otto capitoli: nel primo sono elencate alcune conoscenze teoriche che si sono rivelate necessarie alla comprensione del testo. Nel secondo vengono introdotte alcune notazioni utilizzate da Resnikoff che saranno utilizzate da quel momento in poi. Nel terzo capitolo vengono introdotti gli assiomi di Schrödinger che permettono di analizzare le possibili strutture geometriche adatte allo spazio dei colori. Poiché questi non restringono sufficientemente il campo, Resnikoff introduce un quinto assioma, di cui si è discusso al capitolo quattro, riguardante l'omogeneità ovvero l'inesistenza di *elementi speciali e privilegiati*, concetto che dovrebbe risultare abbastanza intuitivo; così facendo si riesce a concludere che possono esistere solo due strutture geometriche compatibili. Nel quinto e sesto capitolo gli spazi identificati vengono muniti di una metrica appropriata e viene definito il concetto di luminosità dei colori percepiti. Nel settimo capitolo viene reso esplicito il collegamento con le algebre di Jordan così da poter unificare le strutture date mostrando il legame tra i due spazi. Nell'ultimo capitolo oltre ad aver definito il significato geometrico di tonalità e saturazione, sono anche mostrati alcuni approfondimenti ed esempi.

Capitolo 1

Preliminari

In questo capitolo saranno introdotti buona parte dei concetti necessari per poter comprendere il lavoro svolto.

1.1 Connessione e omotopia

<u>Def</u> 1. sia X uno spazio topologico, siano $x, y \in$X
$\Omega\left(\mathrm{X}, x, y\right) = \{\gamma : \mathrm{I} = [0,1] \to \mathrm{X} \text{ continue con } \gamma\left(0\right) = x, \gamma\left(1\right) = y\}$

Proposizione 1.1. *sia X uno spazio topologico connesso per archi allora X è connesso*

Dimostrazione. sia X connesso per archi
supponiamo per assurdo $\mathrm{X} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ con A,B aperti disgiunti non banali
$\Rightarrow$ esistono $\mathrm{x} \in \mathrm{A}; \mathrm{y} \in \mathrm{B} \overset{\text{c.p.a.}}{\Longrightarrow}$ esiste $\gamma \in \Omega\left(\mathrm{X}, \mathrm{x}, \mathrm{y}\right)$
$\Rightarrow [0,1] = \gamma^{-1}\left(\mathrm{A}\right) \cup \gamma^{-1}\left(\mathrm{B}\right)$ aperti disgiunti con $0 \in \gamma^{-1}\left(\mathrm{A}\right); 1 \in \gamma^{-1}\left(\mathrm{B}\right)$
$\Rightarrow [0,1]$ sconnesso assurdo!
$\Rightarrow$ X è connesso □

<u>Def</u> 2. siano X,Y due spazi topologici e siano $\mathrm{f}_0, \mathrm{f}_1 : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ funzioni continue
$\mathrm{f}_0, \mathrm{f}_1$ vengono dette omotope e si scrive $\mathrm{f}_0 \sim_f \mathrm{f}_1$ se:
esiste una funzione $\mathrm{F} : \mathrm{X} \times \mathrm{I} \to \mathrm{Y}$ continua tale che $\mathrm{F}(\mathrm{x}, 0) = \mathrm{f}_0(\mathrm{x})$ e $\mathrm{F}(\mathrm{x}, 1) = \mathrm{f}_1(\mathrm{x})$
dove con I indichiamo l'insieme $[0,1]$

<u>Def</u> 3. una funzione $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ è detta equivalenza omotopica se
esiste $\mathrm{g} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ tale che $\mathrm{f} \circ \mathrm{g} \sim_f \mathrm{Id}_\mathrm{Y}$ e $\mathrm{g} \circ \mathrm{f} \sim_f \mathrm{Id}_\mathrm{X}$
ovvero se f è invertibile a meno di omotopia
X,Y si dicono omotopicamente equivalenti

<u>Def</u> 4. uno spazio topologico X è contraibile se è omotopicamente equivalente ad un punto

Proposizione 1.2. *sia X un insieme qualunque e sia Y un insieme convesso*
siano $\mathrm{f}_0, \mathrm{f}_1 : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *funzioni continue*
allora si ha che $\mathrm{f}_0, \mathrm{f}_1$ *sono omotope*

Dimostrazione. definisco la funzione $\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{t}) := (1-\mathrm{t})\,\mathrm{f}_0(\mathrm{x}) + \mathrm{t}\mathrm{f}_1(\mathrm{x}) \in \mathrm{Y}$ convesso
questa è l'omotopia cercata □

Da questa proposizione segue che ogni insieme convesso è contraibile perché l'identità su un insieme convesso è sempre omotopicamente equivalente alla funzione costante, quindi intuitivamente l'insieme può essere contratto ad un punto attraverso una funzione continua.

<u>Def</u> 5. siano $\alpha, \beta \in \Omega(\mathrm{X},\mathrm{a},\mathrm{b})$ due cammini
si dicono omotopi e si scrive $\alpha \sim_c \beta$ se
esiste una funzione F:I×I→X continua detta omotopia tra i due cammini tale che
$\mathrm{F}(\mathrm{t},0) = \alpha(\mathrm{t}) \quad \mathrm{F}(\mathrm{t},1) = \beta(\mathrm{t})$
$\mathrm{F}(0,\mathrm{s}) = \mathrm{a} \quad \mathrm{F}(1,\mathrm{s}) = \mathrm{b}$

<u>Def</u> 6. l'insieme $\pi_1(\mathrm{X},\mathrm{x}) := \Omega(\mathrm{X},\mathrm{x},\mathrm{x}) / \sim_c$
è detto gruppo fondamentale di X nel punto x (gruppo di Poincaré)

<u>Def</u> 7. uno spazio è detto semplicemente connesso se è connesso per archi e ha il gruppo fondamentale banale

<u>Def</u> 8. π_1:Top,puntati→Grp è un funtore che associa ad ogni coppia (X,x)
con X spazio topologico e $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ il gruppo fondamentale di Poincaré di X in x
sia f:(X,x)→(Y,y) continua con f(x)=y
$\pi_1(\mathrm{f}) =: \mathrm{f}_* : \pi_1(\mathrm{X},\mathrm{x}) \to \pi_1(\mathrm{Y},\mathrm{y})$
$[\alpha] \mapsto [\mathrm{f} \circ \alpha]$

Teorema 1.3. *sia* $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un'equivalenza omotopica*
allora $\mathrm{f}_* : \pi_1(\mathrm{X},\mathrm{x}) \to \pi_1(\mathrm{Y},\mathrm{f}(\mathrm{x}))$ *isomorfismo*

Dimostrazione. $\pi_1(\mathrm{X},\mathrm{x}) \xrightarrow{\mathrm{f}_*} \pi_1(\mathrm{Y},\mathrm{f}(\mathrm{x})) \xrightarrow{\mathrm{g}_*} \pi_1(\mathrm{Y},\mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{x}))) \xrightarrow{\mathrm{f}_*} \pi_1(\mathrm{Y},\mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{x}))))$
con $\mathrm{g} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ tale che $\mathrm{g} \circ \mathrm{f} \sim \mathrm{Id}_\mathrm{X}$ e $\mathrm{f} \circ \mathrm{g} \sim \mathrm{Id}_\mathrm{Y}$
$\mathrm{g}_* \circ \mathrm{f}_*$ e $\mathrm{f}_* \circ \mathrm{g}_*$ sono invertibili
$\Rightarrow \mathrm{f}_*$ è invertibile □

Corollario 1.4. *sia X uno spazio contraibile allora X è semplicemente connesso*

<u>Def</u> 9. sia $U \subseteq \mathbb{R}^d$
sia $f : U \to \mathbb{R}$
diciamo che f è differenziabile di classe C^k con $k \in \mathbb{N}$ se
le derivate parziali $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_j \alpha}$ esistono e sono continue per $\alpha \leq k; j = 1, \dots d$
diciamo che f è di classe C^∞ se è di classe C^k per ogni $k \geq 0$

<u>Def</u> 10. uno spazio topologico (X, τ_X) è detto T_2 o Hausdorff se
per ogni $x, y \in X;\ x \neq y$ esistono U_x, U_y intorni rispettivamente di x, y tali che
$U_x \cap U_y = \emptyset$

1.2 Varietà differenziabili

Def 11. uno spazio M localmente Euclideo di dimensione d è uno spazio topologico di Hausdorff tale che per ogni punto esiste un intorno omeomorfo ad un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^d$ con la topologia euclidea.
se $\varphi : U \to V$ è un omoeomorfismo tra $U \subseteq M$ aperto connesso e $V \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, φ è chiamato mappa coordinata
le funzioni $x_i = r_i \circ \varphi$ sono dette funzioni coordinate
e la coppia (U, φ) è detta sistema coordinato

Def 12. una struttura differenziabile $\mathcal{F}$ di classe C^kcon $1 \leq f \leq \infty$ su uno spazio M localmente Euclideo è una famiglia di sistemi coordinati $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ con A insieme di indici che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$
- $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ è di classe C^k per ogni $\alpha, \beta \in A$
- la famiglia $\mathcal{F}$ è massimale rispetto al punto precedente, ovvero se (U, φ) è un sistema di coordinate tale che $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ e $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ sono di classe C^k per ogni $\alpha \in A$, allora $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$

Def 13. una varietà differenziabile di classe C^k è una coppia $(M, \mathcal{F})$ con M uno spazio di dimesione d, localmente Euclideo e che soddisfi il secondo assioma di numerabilità dotato di una struttura $\mathcal{F}$ di classe C^k, con varietà differenziabile M si intende di classe C^∞ e con una struttura differenziabile $\mathcal{F}$ data

Def 14. uno campo vettoriale X lungo una curva $\sigma : [a, b] \to M$ è una mappa $X : [a, b] \to T(M)$ che *solleva* σ, ovvero $\pi \circ X = \sigma$
con $\pi : T(M) \to M$
$v \mapsto m$ se $v \in M_m$
dove M_m è lo spazio tangente ad M in m, $T(M) = \cup_{m \in M} M_m$
X è detto di classe C^∞ se lo è la mappa $X : [a, b] \to T(M)$

Def 15. siano X, Y due campo vettoriali di classe C^∞ su M
definisco il campo vettoriale $[X, Y]$ detto parentesi di Lie di X eY fissando

$$[X, Y]_m (f) = X_m (Yf) - Y_m (Xf)$$

Def 16. un gruppo di Lie G è una varietà differenziabile che è munita di una struttura di gruppo tale che la mappa $G \times G \to G$
$(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$ sia di classe C^∞

Def 17. un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ su $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale munito di un operatore bilineare $[\ ;\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tale che per ogni $x, y, z \in \mathfrak{g}$ si ha

1. $[x, y] = -[y, x]$ anticommutativa

2. $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$ identità di Jacobi

Def 18. sia $\sigma \in G$, i diffeomorfismi l_σ, r_σ rispettivamente traslazione sinistra e destra di σ sono definiti da:

$$l_\sigma(\tau)=\sigma\tau; \qquad r_\sigma(\tau)=\tau\sigma$$

sia V un sottoinsieme di G denotiamo $r_\sigma(V)$ e $l_\sigma(V)$ con $V\sigma$ e σV

Def 19. uno spazio vettoriale X su G è detto invariante a sinistra se per ogni $\sigma \in G$ si ha

$$dl_\sigma \circ X = X \circ l_\sigma$$

l'insieme degli spazi vettoriali sinistra-invarianti su G è denotato $\mathfrak{g}$

Def 20. definisco l'algebra di Lie del gruppo di Lie G come l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ degli spazi sinistra-invarianti su G munita dell'operazione bilineare $[\ ,\ ]$ parentesi di Lie

Def 21. un omeomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to G$ è chiamato sottogruppo ad uni-parametrico di G

Def 22. sia G un gruppo di Lie e $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie
sia $X \in \mathfrak{g}$ allora $\lambda\frac{d}{dr} \mapsto \lambda X$ è un omeomorfismo di algebre di Lie da $\mathbb{R}$ a $\mathfrak{g}$
esiste un unico sottogruppo uni-parametrico $\exp_X : \mathbb{R} \to G$ tale che

$$d\exp : X\left(\lambda\frac{d}{dr}\right) = \lambda X$$

ovvero $t \mapsto \exp_X(t)$ è l'unico sottogruppo uni-parametrico di G tale che il vettore tangente a 0 è $X(1_G)$
definiamo la mappa esponenziale come

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

$$\exp(x) = \exp_X(1)$$

Def 23. sia M una varietà; sia G un gruppo di Lie
un'azione di G su M da sinistra è una mappa $\mu : G \times M \to M$, C^∞ tale che

$$\begin{aligned} \mu(\sigma\tau, m) &= \mu(\sigma, \mu(\tau, m)) \\ \mu(1_G, m) &= m \end{aligned} \qquad \text{per ogni } \sigma,\tau \in G \text{ e per ogni } m \in M$$

un'azione di G su M da destra è una mappa $\lambda : M \times G \to M$, C^∞ tale che

$$\begin{aligned} \lambda(m, \sigma\tau) &= \lambda(\lambda(m,\sigma),\tau) \\ \lambda(m, 1_G) &= m \end{aligned} \qquad \text{per ogni } \sigma,\tau \in G \text{ e per ogni } m \in M$$

Teorema 1.5. *sia H un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie G*
sia G/H l'insieme $\{\sigma H \mid \sigma \in G\}$ classe laterale sinistra modulo H
sia $\pi : G \to G/H$ la proiezione naturale $\pi(\sigma) = \sigma H$
allora G/H ha un struttura di varietà differenziale tale che:

a. *π è di classe C^∞*

b. *esistono sezioni locali lisce di G/H in G ovvero se $\sigma H \in G/H$*
allora esiste un intorno W di σH e una mappa C^∞, $\tau : W \to G$ tale che $\pi \circ \tau = id$

<u>Def</u> 24. sia $\eta : G \times M \to M$ un'azione da sinistra
sia $\eta_\sigma (m) = \eta (\sigma, m)$

a. l'azione è detta effettiva se 1_G è l'unico elemente di G per cui $\eta_{1_G} \equiv Id$

b. l'azione è detta transitiva se per ogni $m, n \in M$ esiste $\sigma \in G$ tale che $\eta_\sigma (m) = n$

<u>Def</u> 25. una varietà differenziale M è omogenea rispetto a G ,gruppo di Lie,
se esiste η un'azione transitiva di G su M

<u>Def</u> 26. una varietà differenziale M è localmente omogenea rispetto a G, gruppo di Lie
se per ogni $m \in M$ esiste η azione transitiva da G a U_m intorno aperto di m

<u>Def</u> 27. sia $m_0 \in M$, sia $H = \{\sigma \in G \mid \eta_\sigma (m_0) = m_0\}$
H è un sottogruppo chiuso di G chiamato il gruppo di isotropia in m_0

Osservazione 1.6. f è una funzione C^∞ su $G/H \Leftrightarrow f \circ \pi$ è C^∞ su G

Dimostrazione. $\Rightarrow \pi$ è di classe C^∞ per il teorema 1.5
$f \in C^\infty \Rightarrow f \circ \pi \in C^\infty$
$\Leftarrow f \circ \pi \in C^\infty$
f è rappresentata come unione di funzioni C^∞ da G/H a G
$\Rightarrow f \in C^\infty$ □

Teorema 1.7. *siano G un gruppo di Lie e M una varietà differenziabile*
sia $\eta : G \times M \to M$ un azione transitiva da sinistra
sia $m_0 \in M$ e sia H il gruppo di isotropia in m_0, definita la mappa

$$\tilde{\beta} : G/H \to M$$

$$\tilde{\beta} (\sigma H) = \eta_\sigma (m_0)$$

allora $\tilde{\beta}$ è un diffeomorfismo

Dimostrazione. 1. osservo per prima cosa che la funzione $\tilde{\beta}$ sia ben posta:
$\eta_{\sigma h} (m_0) = \eta_\sigma (\eta_h (m_0)) = \eta_\sigma (m_0)$; per ogni $h \in H$
ovvero la funzione $\tilde{\beta} (\sigma H)$ non dipende dal rappresentante σ della classe di equivalenza
2. dimostro ora che $\tilde{\beta}$ è un diffeomorfismo
a. $\tilde{\beta}$ è suriettiva
dal momento che η è un'azione transitiva
per ogni $m \in M$ esiste $\sigma \in G : \eta_\sigma (m_0) = m$
b. $\tilde{\beta}$ è iniettiva

$\tilde{\beta}(\sigma H) = \tilde{\beta}(\tau H) \Leftrightarrow \eta_\sigma(m_0) = \eta_\tau(m_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \eta\tau^{-1}\sigma = m_0 \Leftrightarrow \tau^{-1}\sigma \in H \Leftrightarrow \sigma H = \tau H$

c. $\tilde{\beta}$ è C^∞
$\tilde{\beta} \in C^\infty \Leftrightarrow \tilde{\beta} \circ \pi \in C^\infty$
dove con $\pi : G \to G/H$ la proiezione naturale
ma posso osservare che $\tilde{\beta} \circ \pi = \eta \circ i_{m_0}$
dove con $i_{m_0} : G \to G \times M$ si intende la mappa C^∞
$\sigma \mapsto (\sigma, m_0)$
infatti $\tilde{\beta} \circ \pi(\sigma) = \tilde{\beta}(\pi(\sigma)) = \tilde{\beta}(\sigma H) = \eta_\sigma(m_0) = \eta(\sigma, m_0)$
$\eta \circ i_{m_0}(\sigma) = \eta(i_{m_0}(\sigma)) = \eta(\sigma, m_0)$
questo implica che $\tilde{\beta}$ è di classe C^∞

d. $\mathrm{d}\beta$ non è singolare
consideriamo $\beta = \tilde{\beta} \circ \pi$, dal momento che $\ker\left(\mathrm{d}\pi_{|G_\sigma}\right) = (\sigma H)_\sigma \subset G_\sigma$
per dimostrare che $\mathrm{d}\tilde{\beta}_{|(G/H)_{\sigma H}}$ è non singolare è sufficiente provare
che $\ker(\mathrm{d}\beta_{G_\sigma}) = (\sigma H)_\sigma$
osservo che per ogni $\sigma \in G$ si ha $\beta = \eta_\sigma \circ \beta \circ l_{\sigma^{-1}}$
con l_τ la moltiplicazione a sinistra per τ,
quindi basta provare $\mathrm{d}\beta_{|G_{1_G}} = H_{1_G}$; sicuramente $H_{1_G} \subset \ker\left(\mathrm{d}\beta_{|G_{1_G}}\right)$
quindi sia $x \in \ker\left(\mathrm{d}\beta_{|G_{1_G}}\right)$, per provare che $x \in H_{1_G}$ basta mostrare
che $\exp tX \in H$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ dove X è il campo vettoriale
determinato da x su G invariante a sinistra;
considero il vettore tangente alla curva $\beta(\exp tX)$:
$\mathrm{d}\beta(X_{\exp tX}) = \mathrm{d}\left(\eta_{\exp tX} \circ \beta \circ l_{\exp(-tX)}\right)(X_{\exp tX}) =$
$= \mathrm{d}\eta_{\exp tX} \circ \mathrm{d}\beta(X(1_G)) = \mathrm{d}\eta_{\exp tX} \circ \mathrm{d}\beta(x) \overset{x \in \ker\left(\mathrm{d}\beta_{|G_{1_G}}\right)}{=} 0$
$\mathrm{d}\beta(X_{\exp tX}) = 0 \Rightarrow \beta(X_{\exp tX}) \equiv m_0$
questo implica $\exp tX \in H$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ quindi $x \in H_{1_G}$ □

<u>Def</u> 28. sia G un gruppo e H un suo sottogruppo
H si dice normale se le sue classi di equivalenza destre e sinistre sono uguali
ovvero se $aH = Ha$ per ogni $a \in G$

<u>Def</u> 29. un gruppo G non banale è detto semplice se i suoi unici sottogruppi normali sono
il gruppo banale e il gruppo stesso

<u>Def</u> 30. in un algebra di Lie
un elemento x è detto nilpotente se esiste una sua potenza x^m che sia nulla
un elemento x è detto uni potente se $x - 1$ è nilpotente

<u>Def</u> 31. in un algebra di Lie un elemento t è detto semisemplice se ogni sottospazio
t-invariante ha uno spazio complementare ancora t-invariante

Teorema 1.8 (**scomposizione di Jordan-Chevalley**).
sia x un elemento invertibile nei funzionali su uno spazio vettoriale finito

la decomposizione moltiplicativa esprime x come prodotto di

$$x = x_s \cdot x_u$$

dove x_s è semisemplice, x_u è unipotente e communtano tra di loro in particolare dato che lo spazio vettoriale è finito la scomposizione è unica

Osservazione 1.9. un'algebra di Lie nilpotente può essere considerata come l'algebra di Lie delle matrici triangolari strettamente superiori, quindi un'algebra di Lie unipotente corrisponde alle matrici superiori con diagonale unitaria

$$T_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \alpha_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{R}; 1 \leq i < j \leq n \right\}$$

questo implica che $\dim T_n = \frac{n(n-1)}{2}$

<u>Def</u> 32. una metrica di Riemann su un varietà differenziabile X di dimensione n è un campo di 2-tensori su X simmetrico e definito positivo, ovvero è possibile definire in modo continuo rispetto agli $x \in X$ un prodotto scalare:

$$g_x : T_x X \times T_x X \to \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto g_x (v, w)$$

dove con T_x si intende lo spazio tangente a X in x
una varietà differenziabile X su cui è definita una metrica di Riemann g è detta varietà di Riemann (X, g)

Osservazione 1.10. considerando un sistema coordinato (U, ϕ) di X con U un intorno di $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denoto $\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n\}$ la base dello spazio tangente $T_x X$ osservo che le funzioni continue $g_{\mu\nu}$ di classe C^∞ definite come $g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu)$ con $\mu, \nu = 1, \ldots, n$ verificano $g = g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$, solitamente scritta come

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu} \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu$$

<u>Def</u> 33. sia (X, g) una varietà di Riemann connessa
sia $\gamma : [0, 1] \to X$ una curva continua definisco la lunghezza della curva γ come

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(u)\|_{\gamma(u)} \mathrm{d}u$$

dove $\|\dot{\gamma}(u)\|_{\gamma(u)} = \sqrt{g_{\gamma(u)}(\dot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u))}$ è la norma indotta da g
quindi è possibile definire la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ come

$$d(x, y) = \inf \{L(\gamma) | \gamma : [0, 1] \to X \text{ regolare a tratti tale che } \gamma(0) = x;\ \gamma(1) = y\} \tag{1.1}$$

d è detta distanza di Riemann su X indotta dalla metrica g
la curva regolare a tratti γ di X che minimizza la distanza di Riemann tra i punti x, y è definita come la geodetica che collega x e y

Osservazione 1.11. siano (X, g) e (Y, h) due varietà di Riemann
sia $f : X \to Y$ un diffeomorfismo
allora f induce un isomorfismo lineare $\mathrm{d}f_x : T_x X \to T_{f(x)} Y$
siano inoltre d_g e d_h le distanze associate rispettivamente alle metriche di Riemann g e h
allora f è un'isometria per ogni $x, y \in X$ se e solo se
$h_{f(x)}\left(\mathrm{d}f_x(v), \mathrm{d}f_x(w)\right) = g_x(v, w)$ per ogni $x \in X$ e $v, w \in T_x X$

[War83]

1.3 Algebre di Jordan

Def 34. un'algebra di Jordan A è uno spazio vettoriale munito di un prodotto bilineare commutativo

$$\begin{aligned} \bullet : A \times A &\to A \\ (a, b) = a \bullet b &= b \times \end{aligned}$$

che soddisfi l'identità di Jordan:

$$\left(x^2 \bullet y\right) \bullet a = a^2 \bullet (b \bullet a) \tag{1.2}$$

$\bullet$ è chiamata prodotto di Jordan

Def 35. sia A un algebra, non necessariamente di Jordan, per ogni $a \in A$ definisco gli operatori moltiplicativi sinistro e destro

$$\begin{aligned} L_a : A &\to A \\ b &\mapsto L_a(b) = a \bullet b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} R_a : A &\to A \\ b &\mapsto R_a(b) = b \bullet a \end{aligned}$$

si definiscono così le mappe lineari $L, R : A \to \mathrm{End}(A)$

Osservazione 1.12. si osservi che se A è un algebra di Jordan allora gli operatori coincidono e si ha $L_a = R_a$ per ogni $a \in A$ e l'identità di Jordan definita in (1.2) diventa $L_a\left(L_{a_2}(b)\right) = L_{a^2}\left(L_a(b)\right)$

Def 36. definiamo inoltre la mappa di rappresentazione quadratica

$$\begin{aligned} P : A &\to \mathrm{End}(A) \\ a &\mapsto P_a = 2L_a^2 - L_{a^2} \end{aligned}$$

<u>Def</u> 37. un'algebra di Jordan è detta formalmente reale (AJFR) o euclidea se per ogni $a_1, \dots, a_n \in A$ tali che $a_1^2 + \cdots a_n^2 = 0$ si ha $a_1 = \cdots = a_n = 0$

Teorema 1.13. *sia A una AJFR allora esiste unica $c = 1$ unità tale che $1a = a$ per ogni $a \in A$*

Osservazione 1.14. per ogni A algebra di Jordan formalmente reale posso definire un sistema completo di idempotenti ortogonali ovvero esistono $c_1, \dots, c_k$ tali che:

$$\begin{aligned} c_i^2 &= c_i && \text{per ogni } i = 1, \dots, k \\ c_i \bullet c_j &= 0 && \text{per ogni} i \neq j \\ c_1 + \cdots + c_k &= e \end{aligned}$$

<u>Def</u> 38. una AJFR è detta semplice se è non banale non ha ideali propri mentre è detta semisemplice se è somma diretta di AJFR semplici

Teorema 1.15. *ogni AJFR semplice di dimensione finita è isomorfa a una delle seguenti algebre di Jordan:*

- $\mathfrak{h}(n, \mathbb{R})$*: le matrici reali hermitiane (autoaggiunte) dove il prodotto $\bullet$ è definito come $a \bullet b \overset{def}{=} \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a)$ dove $\cdot$ è il prodotto matriciale standard*
- $\mathfrak{h}(n, \mathbb{C})$*: le matrici complesse hermitiane dove il prodotto $\bullet$ è definito come $a \bullet b \overset{def}{=} \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a)$*
- $\mathfrak{h}(n, \mathbb{H})$*: le matrici dei quaternioni hermitiane dove il prodotto $\bullet$ è definito come $a \bullet b \overset{def}{=} \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a)$*
- $\mathfrak{h}(3, \mathbb{O})$*: le matrici 3×3 hermitiane a coefficienti negli ottonioni sempre con il prodotto definito precedentemente, dettaq anche algebra di Albert*
- $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *detto anche spin factor con il prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$ ovvero*

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ (\alpha + v, \beta + w) &\mapsto \alpha\beta + v \cdot w + \alpha w + \beta v \end{aligned}$$

<u>Def</u> 39. sia A un'algebra di Jordan di dimensione d,
sia r il grado del polinomio caratteristico di L allora definisco:
$\sigma(a) = \dfrac{r}{d} \mathrm{tr} L_a$ la traccia ridotta di $a \in A$
$|a| = \{\det P_a\}^{\frac{r}{d}}$ la norma ridotta di $a \in A$

Osservazione 1.16. se $A = \mathfrak{h}(n, \mathbb{K})$ per ogni $a, b \in A$
la rappresentazione quadratica P_a soddisfa $P_a(b) = a \cdot b \cdot a$

Dimostrazione.

$$P_a(b) = 2L_a^2(b) - L_{a^2}(b) = 2a \bullet (a \bullet b) - a^2 \bullet b =$$
$$= 2a \bullet \frac{a \cdot b + b \cdot a}{2} - \frac{a^2 \cdot b + b \cdot a^2}{2} =$$
$$= \frac{a \cdot (a \cdot b + b \cdot a) + (a \cdot b + b \cdot a) \cdot a - a^2 \cdot b - b \cdot a^2}{2} = a \cdot b \cdot a$$

□

[McC04], [JvNW93], [Cor21]

Capitolo 2

Notazioni e terminologia

Introduciamo quelle che saranno le notazioni usate in tutto il documento, così come definite da Resnikoff [Res74].

Indicheremo la luce astratta con le lettere gotiche minuscole (ad esempio $\mathfrak{x}, \mathfrak{n}$), la risultante luce fisica con le lettere romane minuscole in grassetto corrispondenti, mentre la percezione umana di quella determinata luce sarà indicata dalle lettere romane minuscole. Ovvero, posso definire due funzioni:

1. $$\mathfrak{x} \mapsto \mathbf{x}(\mathfrak{x}) = \mathbf{x}$$

   che mostra la corrispondenza tra la luce $\mathfrak{x}$ e la sua visione attraverso un trasduttore ottico $\mathbf{x}$, dove con trasduttore intendiamo un dispositivo che converte una grandezza fisica in un'altra, ad esempio una fotocellula;

2. $$\mathfrak{x} \mapsto x(\mathfrak{x}) = x$$

   che mostra la corrispondenza tra la luce $\mathfrak{x}$ e la sua visione come percepita dall'occhio umano.

Possiamo conoscere le proprietà delle luci astratte soltanto attraverso quelle percepite da un trasduttore ottico, quindi quello di cui ci occuperemo sarà la relazione tra $\mathbf{x}(\mathfrak{x})$ e $x(\mathfrak{x})$ al variare di $\mathfrak{x}$.

Denotiamo inoltre con $I = [\nu_{min}; \nu_{max}] \subset \mathbb{R}$ lo spettro del visibile, la parte di spettro elettromagnetico visibile all'occhio umano dove con $\nu_{min} \approx 380$nm si intende la minima frequenza percepita e con $\nu_{max} \approx 780$nm quella massima.

Ogni luce percepita da un trasduttore ottico può essere vista come una classe di equivalenza di funzioni $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}$ che differiscono su un insieme di misura nulla secondo Lebesgue tali che $\int_I \mathbf{x}^2(\nu)\,\mathrm{d}\nu < +\infty$. Definisco quindi come $\mathbf{x}^2(\nu)$ l'intensità della luce alla frequenza ν e come $\int_I \mathbf{x}^2(\nu)\,\mathrm{d}\nu$ l'intensità totale di $\mathbf{x}$.

<u>Def</u> 40. Uno spazio $\mathbf{H}$ è detto spazio di Hilbert reale o complesso se
$(\mathbf{H}, <;>)$ è uno spazio vettoriale su cui è definito il prodotto $<;>: \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}\,(risp. \mathbb{C})$

ed è tale che la distanza indotta dal prodotto renda lo spazio ($\mathbf{H}$,d) uno spazio metrico completo

Definisco ora lo spazio di Hilbert delle funzioni il cui quadrato è integrabile $\mathcal{H} := \left\{ f : I \to \mathbb{R} \mid 0 < \int_I f^2 < +\infty \right\} = \mathrm{L}^2 (I, \mathbb{R})$ e, a partire da questo, definiamo l'insieme

$$\mathcal{L} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{H} \mid \mathbf{x} \text{ sia una luce fisica}\}$$

Osservazione 2.1. $\mathcal{H}$ è generato da $\mathcal{L}$

Osservazione 2.2. L'addizione di elementi in $\mathcal{L}$ corrisponde alla sovrapposizione di due luci fisiche ad esempio attraverso l'uso di specchi

Osservazione 2.3. La moltiplicazione per uno scalare positivo intero può essere facilmente immaginata come sovrapposizione della luce con se stessa, analogamente la moltiplicazione per uno scalare razionale è la frazionazione della luce che può essere attuata sempre con l'utilizzo di un sistema di specchi

Osservazione 2.4. Newton scoprì l'esistenza di luci spettrali, quelle che si osservano decomponendo la luce bianca attraverso in prisma (come descritto a pagina 7), tali che la corrispondente luce fisica sia definita su tutto I ma non può essere vista come somma di luci spettrali distinte. Dunque possiamo affermare che $\dim\mathcal{H} = \infty$

2.1 Relazione di equivalenza e spazio quoziente

Sullo spazio $\mathcal{L}$ posso definire una relazione $\sim$

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Longleftrightarrow x = y \text{ (sono percepite come uguali)}$$

dove il modo per verificare l'uguaglianza tra due luci percepite è chiamato *color matching*, descritto a pagina 14. Mostro che quella appena definita è una relazione di equivalenza:

1. PROPRIETÀ RIFLESSIVA: $\mathbf{x} = \mathbf{x} \Rightarrow x = x \Rightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{x}$
2. PROPRIETÀ SIMMETRICA: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow \mathbf{y} \sim \mathbf{x}$
3. PROPRIETÀ TRANSITIVA: $\left.\begin{array}{l} \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow x = y \\ \mathbf{y} \sim \mathbf{z} \Leftrightarrow y = z \end{array}\right\} \Rightarrow x \overset{\text{p.transitiva}}{=} z \Rightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{z}$

Da cui segue che le operazioni definite in $\mathcal{H}$, ristrette agli elementi di $\mathcal{L}$, possono essere ereditate dallo spazio quoziente

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}/\sim \tag{2.1}$$

delle luci percepite attraverso la definizione

$$\alpha\,[\mathbf{x}] + \beta\,[\mathbf{y}] = [\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}]$$

dove con $[\mathbf{x}]$ intendo la classe di equivalenza delle luci percepite come la luce $\mathbf{x}$. Attraverso alcuni esperimenti è stato provato che sotto condizioni di osservazione standard (che non corrispondono con quelle previste da Resnikoff ovvero con la luce $\mathbf{x}$ presentata come un punto luminoso su uno sfondo uniformemente illuminato) queste operazioni sono ben definite: non dipendono dalla scelta del rappresentante della classe di equivalenza.
Ne consegue che esiste un spazio vettoriale reale $\mathcal{V} = \operatorname{span}\{\mathcal{P}\}$ per cui vale che la funzione

$$\begin{aligned} \mathrm{h} : \mathcal{H} &\to \mathcal{V} \supset \mathcal{P} \\ \mathbf{x} &\mapsto [\mathbf{x}] = x \end{aligned}$$

è un omomorfismo di spazi vettoriali ovvero $\mathrm{h} \in \operatorname{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ e vale che $\forall x, y \in \mathcal{V}\ x = y$ solo se sono percepiti come colori uguali.

Uno dei più importanti fatti sperimentali sulla percezione dei colori è la finita dimensionalità di $\mathcal{V}$: ciò implica che infinite luci fisiche distinte devono coincidere a livello di percezione umana.

Capitolo 3

Assiomi di Schrödinger

Da questo momento in poi assumiamo la percezione di una luce $\mathfrak{x}$ come un piccolo punto luminoso posto al centro di uno sfondo uniformemente illuminato, possiamo quindi formulare alcuni risultati sperimentali come assiomi che riducono le possibili conformazioni che la geometria di $\mathcal{P}$ può assumere.

Assioma 1. Per ogni $x \in \mathcal{P}$, per ogni $\alpha > 0$ si ha $\alpha x \in \mathcal{P}$

Con ciò si intende che ogni multiplo positivo di una luce percepita è ancora una luce percepita. Questo è stato verificato solamente per un numero ristretto di reali positivi dal momento che se α fosse troppo grande il trasduttore si distruggerebbe, mentre, se α fosse troppo piccolo, interverrebbero effetti quantici e rumori di fondo a disturbare il trasduttore impedendo una relazione tra input e output; se α è vicino a zero invece non riusciamo più a vedere la luce. L'assioma 1 asserisce quindi che $\mathcal{P}$ è un cono in $\mathcal{V}$, anche se è più corretto immaginarlo come un cono tronco sia dall'alto che dal basso, continueremo a immaginarlo come un cono infinito, come mostrato anche da Newton, pagina 7 .

Assioma 2. Dato $x \in \mathcal{P}$ allora non esiste $y \in \mathcal{P}$ tale che $x + y = 0$

Ovvero in nessun modo la sovrapposizione di due luci percepite può produrre l'assenza di luce, quindi non esistono sottospazi di $\mathcal{P}$ di dimensione 1 (se esistesse un sottospazio di dimensione 1 allora al suo interno esisterebbe l'opposto di ogni elemento quindi dato $x \in \mathcal{P}$ esisterebbe l'elemento $-x$ tale che $x + (-x) = 0$ e questo sarebbe un assurdo)

Assioma 3. Per ogni $x, y \in \mathcal{P}$, e per ogni $\alpha \in [0, 1]$ allora si ha $\alpha x + (1 - \alpha)\, y \in \mathcal{P}$

Come possibile dedurre dalle leggi di Grassmann mostrate a pagina 12. In altre parole il segmento che congiunge due punti in $\mathcal{P}$ è interamente contenuto in $\mathcal{P}$, questo implica, insieme agli assiomi precedenti, che $\mathcal{P}$ è un cono convesso in $\mathcal{V}$. Viste le proposizioni e osservazioni precedenti sappiamo che $\mathcal{P}$ convesso è connesso per archi, topologicamente connesso, contraibile e quindi anche semplicemente connesso.

Gli assiomi 1 e 3 implicano che $\mathcal{P}$ è chiuso per le combinazioni coniche ovvero

$$\text{per ogni } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+ \text{ e per ogni } x_1, x_2 \in \mathcal{P} \text{ si ha } \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \equiv z \in \mathcal{P}$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2)\, z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \mathcal{P}$$

iterando questo ragionamento si ottiene $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in \mathcal{P}$ con $\alpha_k \in \mathbb{R}^+; x_k \in \mathcal{P}$

Assioma 4. per ogni $x_k \in \mathcal{P}$ con $k = 1, \ldots, 4$ si ha che esistono $\alpha_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\sum_{k=1}^{4} \alpha_k x_k = 0$

Questo assioma significa che, prese quattro luci precepite differenti in $\mathcal{P}$, queste sono linearmente dipendenti. Più nello specifico attraverso l'assioma 2 possiamo dire che gli α_k non possono avere tutti lo stesso segno; infatti, se fossero tutti positivi, si otterrebbe $\bar{x} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k x_k$ e $\bar{y} = \alpha_4 x_4$ e varrebbe $\bar{x} + \bar{y} = 0$ assurdo, analogamente se fossero tutti negativi. Pertanto le uniche situazioni accettabili sarebbero tre segni uguali e uno diverso come previsto dall'esperimento di *color matching*, ovvero la possibilità di esprimere una luce percepita come somma di tre stimoli luminosi, oppure due coefficienti positivi e due negativi come previsto dagli esperimenti di Wright and Guild (pagina 14).
L'assioma 4 implica inoltre che la dimensione dello spazio $\mathcal{V}$ è sicuramente minore o uguale a 3; questa dipende dalla caratteristica di ogni osservatore in particolare:

- $\dim\mathcal{V} = 0$; non vedente
- $\dim\mathcal{V} = 1$; monocromatico
- $\dim\mathcal{V} = 2$; bicromatico
- $\dim\mathcal{V} = 3$; tricromatico

Da adesso in poi assumiamo l'osservatore tricromatico quindi con $\dim\mathcal{V} = 3$ e $\mathcal{P}$ un cono regolare convesso immerso in uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

Capitolo 4

Omogeneità

4.1 Motivazione unidimensionale all'omogeneità di $\mathcal{P}$

Già nel 1876 Helmholtz, le cui teorie sullo spazio dei colori sono state affrontate la pagina 9, aveva osservato un paradosso nell'abilità dei pittori di rappresentare i vari stadi di illuminazione solo attraverso i pigmenti, sfruttando i punti di ombra e di luce: addirittura due quadri che rappresentano scene completamente diverse, come un deserto soleggiato e una notte stellata, possono essere visti vicini in una stanza con illuminazione costante e far comunque percepire la differenza nelle ambientazioni e ricordare la realtà. Questa si definisce stabilità visiva e consiste nella capacità del sistema visivo umano di adattarsi a diversi stadi di illuminazione mantenendo quasi inalterata la percezione dei colori: ad esempio un maglione verde ci appare dello stesso verde sia in una giornata serena, sia in una piovosa, sia in una sera al tramonto; mentre se lo fotografiamo senza specificare la condizione di illuminazione otterremo tre tonalità completamente diverse.

La legge di Fechner, enunciata a pagina 11, spesso considerata la prima legge psico-fisica, descrive la risposta del sistema visivo umano ai cambiamenti cromatici; infatti attraverso esperimenti è stato scoperto che la luminosità $b(x)$ di una luce percepita x è proporzionale a $\log x$ quindi si ottiene che la luminosità relativa $b(x_1) - b(x_2)$ tra due luci $x_1, x_2 \in \mathcal{P}$ sarà

$$b(x_1) - b(x_2) \propto \log x_1 - \log x_2 = \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

Possiamo quindi dedurre che la luminosità relativa è invariante rispetto ai cambi simultanei di intensità luminosa, ovvero sia $\lambda \in \mathbb{R}^+$ la luminosità relativa di $\lambda x_1, \lambda x_2$ e x_1, x_2 è la stessa:

$$b(\lambda x_1) - b(\lambda x_2) \propto \log(\lambda x_1) - \log(\lambda x_2) = \log\left(\frac{\lambda x_1}{\lambda x_2}\right) = \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \propto b(x_1) - b(x_2)$$

Possiamo quindi identificare l'insieme di tutte le luci percepite con $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, escludendo l'assenza di luce, e questo è sia uno spazio topologico che un gruppo, rispetto alla moltiplicazione per reali positivi. Inoltre $\mathbb{R}^+$ è uno spazio omogeneo rispetto a se stesso ovvero per ogni coppia

$x, y \in \mathbb{R}^+$ esiste $\lambda := \frac{y}{x} \in \mathbb{R}^+$ tale che $y = \lambda x = \frac{y}{x} x$. A partire da questo possiamo definire una metrica $\mathbb{R}^+$ invariante:

$$d(x_1, x_2) = |\log x_1 - \log x_2| = \left|\log \frac{x_1}{x_2}\right| \text{ con } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$$

L'obiettivo è quindi generalizzare questo fatto all'intero spazio dei colori percepiti, usando la proprietà dell'invarianza della visione umana per far emergere delle metriche su $\mathcal{P}$

4.2 Omogeneità di $\mathcal{P}$

Dal momento che assumiamo come configurazione osservativa una luce vista come uno piccolo stimolo luminoso percepito su uno sfrondo uniformemente illuminato, possiamo considerare in questo contesto una definizione di $\mathcal{P}$ differente da quella data in (2.1):

$$\mathcal{P} = (\mathcal{L} \times \mathcal{L}) / \sim$$

Quindi posso considerare un colore percepito $x \in \mathcal{P}$ come una coppia $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ dove $\mathbf{x}$ è lo stimolo luminoso centrale mentre $\mathbf{b}$ è lo sfondo uniformemente illuminato. Due coppie distinte $(\mathbf{x}_1, \mathbf{b}_1)$ e $(\mathbf{x}_2, \mathbf{b}_2)$ con $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$;$\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{b}_2$ appartengono alla stessa classe di equivalenza se i colori indotti dalla vista della luce $\mathbf{x}_i$ su sfondo $\mathbf{b}_i$ sono percepiti come lo stesso $x \in \mathcal{P}$.

Considerando $\mathcal{P}$ come un cono positivo immerso in uno spazio vettoriale reale $\mathcal{V}$ di dimensione 3, definisco con $GL(\mathcal{P})$ il gruppo delle trasformazioni lineari che preservano l'orientazione di $\mathcal{V}$ e il cono dei colori percepiti $\mathcal{P}$

$$GL(\mathcal{P}) := \{g \in GL(3, \mathbb{R}) \mid \det g > 0; g(x) \in \mathcal{P} \text{ per ogni } x \in \mathcal{P}\}$$

dove con $GL(3, \mathbb{R})$ si intende il gruppo di matrici 3×3 invertibili.

Per prima cosa, è ormai generalmente accettato il fatto che ogni colore percepito può essere trasformato in un altro *vicino* attraverso un cambiamento dello sfondo, ad esempio:

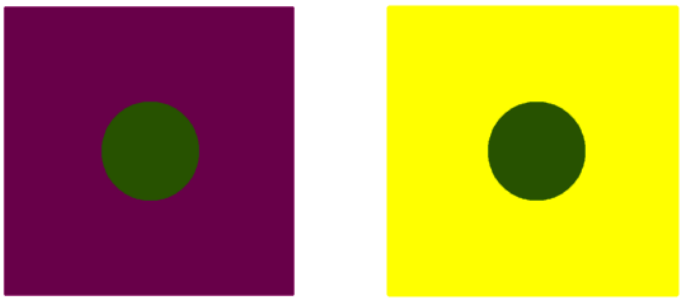

Figura 4.1: esempio di come il cambiamento di sfondo influisca sulla percezione del colore: i colori centrali sono esattamente identici

Un elemento $g \in GL(\mathcal{P})$ può essere immaginato come un cambio dell'illuminazione di sfondo, considero $\mathfrak{x}, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$ tre luci astratte definisco $x_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{x}) \in \mathcal{P}$ la luce percepita quando $\mathfrak{x}$ è mostrata all'osservatore sullo sfondo $\mathfrak{n}$, analogamente posso considerare $x_{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{x} + \mathfrak{n}' - \mathfrak{n}) \in \mathcal{P}$ che generalmente rappresenta un colore differente da quello precedente.

Su $\mathcal{P}$ posso quindi considerare l'applicazione $x_y \overset{g}{\longmapsto} (x + y' - y)_{y'}$ che banalmente preserva $\mathcal{P}$ ed ha un'inversa il che significa che le applicazioni di questo tipo sono a tutti gli effetti appartenenti a $GL(\mathcal{P})$

Assioma 5. $\mathcal{P}$ è localmente omogeneo rispetto ai cambiamenti di illuminazione di sfondo

L'assioma 5 ci assicura che preso $x \in \mathcal{P}$ esiste un suo intorno aperto U su cui è definita un'azione transitiva di $\mathrm{GL}(\mathcal{P})$ su U, ovvero attraverso un cambiamento di sfondo è possibile portare il colore x in un qualsiasi colore dell'intorno.

Osservazione 4.1. considerando $\mathcal{V}$ con la topologia indotta da quella euclidea si ha che $\mathcal{V}$ ha una struttura da varietà differenziabile e questo implica che anche $\mathcal{P}$ sia una varietà differenziabile

Dimostrazione. $\mathcal{P}$ è localmente omogeneo ovvero
per ogni $x \in \mathcal{P}$ esiste U_x intorno aperto di x tale che
per ogni $y \in U_x$ esiste $g \in GL(\mathcal{P})$ tale che $y = g(x)$
questo implica che posso scrivere $\mathcal{P} = \cup_{x \in \mathcal{P}} U_x$ unione di aperti
quindi anche $\mathcal{P}$ è un aperto
$\mathcal{P}$ aperto eredita la struttura di varietà diffenziale da $\mathcal{V}$ □

Proposizione 4.2. *siano $x, y \in \mathcal{P}$ allora esiste sempre $g \in GL(\mathcal{P})$ tale che $y = g(x)$*

Dimostrazione. sia $L = \alpha x + (1 - \alpha) y$ il segmento che unisce x e y contenuto in $\mathcal{P}$
per l'assioma 3; osservo che L è compatto in $\mathcal{P}$, ovvero
$L = \bigcup_{z \in L} U_z$ un ricoprimento aperto con U_z omogenei,
avendo L compatto si ha l'esistenza di
$x_1, \ldots, x_n \in L$ tali che $L \subseteq \bigcup U_{x_i}$
$$x_{i+1} \in U_{x_i}, i = 1, \ldots, n-1;\ x \in U_{x_1};\ y \in U_{x_n}$$
quindi si genera la successione $x = x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} = y$
definisco ora g_i i cambiamenti di sfondo che portano x_i in x_{i+1}
ottenendo $g := g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_0$ ben definita e tale che $y = g(x)$ □

Da questo segue che $\mathcal{P}$ è globalmente omogeneo se e solo se è localmente omogeneo, quindi l'assioma 5 può essere riformulato in $\mathcal{P}$ *è globalmente omogeneo rispetto ai cambi dell'illuminazione di sfondo*

4.3 Conseguenze dell'omogeneità sulla struttura di $\mathcal{P}$

A partire da questi risultati, possiamo osservare che P è omogeneo rispetto al gruppo $GL(\mathcal{P})$ che, essendo un sottogruppo di $GL(\mathcal{V})$, ne eredita la struttura di gruppo di Lie. Siamo pertanto nella situazione prevista dalle ipotesi del teorema 1.7, quindi si ha un diffeomorfismo

$\beta : GL(\mathcal{P})/H \to \mathcal{P}$ dove con H si intende il sottogruppo di isotropia di $GL(\mathcal{P})$ in un punto $x \in \mathcal{P}$ fissato ma arbitrario.
L'assioma 1 ci garantisce che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^+$ l'applicazione $x \mapsto \alpha x$ preserva $\mathcal{P}$, quindi qualunque trasformazione $g \in GL(\mathcal{P})$ esiste un'unica trasformazione $h \in SL(\mathcal{P}) = GL(\mathcal{P}) \cap SL(\mathcal{V})$ ed un unico $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tali che $g = \alpha h$; dove con $SL(\mathcal{V})$ si intende l'insieme delle trasformazioni a determinante unitario.
Da questo si ottiene che

$$GL(\mathcal{P}) = \mathbb{R}^+ \times SL(\mathcal{P})$$

quindi si ha che il gruppo di isotropia di $\mathbb{R}^+$ è $\{1\}$ da cui segue che l'unica parte non banale del quoziente $GL(\mathcal{P})/H$ è un sottogruppo K compatto non banale di $SL(\mathcal{P})$, quindi si verifica:

$$\mathcal{P} \cong \mathbb{R}^+ \times \frac{SL(\mathcal{P})}{K}$$

Osservo che $SL(\mathcal{P}) \subseteq SL(n, \mathbb{R})$ dove n varia tra 0 e 3 come previsto dall'assioma 4 in base alla vista dell'osservatore, come assunto in precedenza consideriamo solo il caso $n = 3$

$$\begin{aligned} 3 = \dim(\mathcal{P}) = \dim\left(\mathbb{R}^+ \times SL(\mathrm{P})/K\right) = 1 + \dim(SL(\mathrm{P})/K) \\ \dim(SL(\mathrm{P})/K) = 2 = \dim(SL(\mathrm{P})) - \dim(K) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Osservazione 4.3. $\dim(SL(3, \mathbb{R})) = 8$

Dimostrazione. $SL(3, \mathbb{R}) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b\det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c\det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} =$$

$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) = 1$
quindi pongo una sola condizione sulle matrici 3×3 a coefficienti in $\mathbb{R}$
$\dim(SL(3, \mathbb{R})) = \dim(M_3(\mathrm{R})) - 1 = 9 - 1 = 8$ □

A partire dall'equazione in (4.1) e sfruttando l'osservazione precedente si ha un vincolo dimensionale su K ovvero:

$$\dim(SL(\mathcal{P})) = 2 + \dim K \leq 8 \tag{4.2}$$

Visti il teorema 1.8 e l'osservazione 1.9 possiamo giungere alla conclusione che esistono un gruppo semisemplice S ed esistono $n_i \in \mathbb{N}$ tali che $\dim SL(\mathcal{P}) = \dim S + \dim(T_{n_1} \times \cdots \times T_{n_k})$ quindi (4.2) diventa

$$8 \geq 2 + \dim K = \dim S + \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n_i - 1)}{2} \tag{4.3}$$

Teorema 4.4. *$\mathcal{P}$ è uno spazio omogenero equivalente ad uno dei due spazi seguenti:*

$$\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \tag{4.4}$$

$$\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \frac{SL(2, \mathbb{R})}{SO(2)} \tag{4.5}$$

Dimostrazione.
Visti gli assiomi enunciati precedentemente, si ha che $\mathcal{P}$ è uno spazio omogeneo. Inoltre, per il vincolo dimensionale in (4.3), si ha che gli unici n_i interessanti ai fini del nostro studio sono quelli compresi tra 2 e 4. Osservo che gli unici gruppi di Lie semplici non compatti di dimensione minore di otto sono $SL(2,\mathbb{R})$ e $SL(3,\mathbb{R})$ quindi si ha che S semisemplice può essere:

1. $S = \emptyset$
2. $S = SL(2,\mathbb{R})$
3. $S = SL(3,\mathbb{R})$
4. $S = SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$

Dal momento che T_n non ha sottogruppi compatti si ha che K, compatto, deve essere un sottogruppo di S. Quindi analizzando i vari casi singolarmente si ha:

1. $S = \emptyset$ implica che anche $K = \emptyset$ quindi (4.3) si riduce a $\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n_i-1)}{2} = 2$ che ha come unica soluzione $k = 2; n_1 = n_2 = 2$ con $T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^+$ Quindi lo spazio omogeneo $\mathcal{P}$ diventa

   $$\mathcal{P} = GL(\mathcal{P})/H = \mathbb{R}^+ \times SL(\mathcal{P})/K \cong \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

   Questo rappresenta lo spazio dei colori come lo abbiamo sempre immaginato ovvero con tre coordinate cromatiche distinte ad esempio RGB, XYZ, LMS; la cui struttura è spiegata più dettagliatamente nell'introduzione a pagina 16.

2. $S = SL(2,\mathbb{R})$ spazio di dimensione 3 quindi (4.3) diventa
   $8 \geq 3 + \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n_i-1)}{2} = 2 + \dim K \Leftrightarrow 5 \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n_i-1)}{2} = \dim K - 1$
   gli unici sottogruppi K compatti di S sono:

   (a) $K = \{1_G\}$ con $\dim K = 0$ ma cosi la condizione precedente è ridotta a $\sum \frac{n_i(n_i-1)}{2} = -1$ e questo è impossibile

   (b) $K = SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$ di dimensione 1 da cui segue $\sum \frac{n_i(n_i-1)}{2} = 0$ ovvero $k = 0$ quindi ottengo un'altra scrittura di $\mathcal{P}$

   $$\mathcal{P} = GL(\mathcal{P})/H = \mathbb{R}^+ \times SL(\mathcal{P})/K \cong \mathbb{R}^+ \times \frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}$$

   In questo caso $\mathcal{P}$ come spazio omogeneo è equivalente al prodotto di $\mathbb{R}^+$ e lo spazio di Poincaré-Lobachevsky due-dimensionale di curvatura negativa

3. $S = SL(3, \mathbb{R})$ spazio di dimensione 8 da cui segue che il vincolo dimensionale $8 \geq 8 + \sum \frac{n_i(n_i-1)}{2} = 2 + \dim K$ e questo implica che $k = 0$ e che il sottospazio compatto K di $SL(3, \mathbb{R})$ deve avere dimensione 6 ciò é assurdo dal momento che il sottogruppo massimale compatto è $SO(3)$ che ha dimensione 3

4. $S = SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ analogamente al caso precedente si otterrebbe $8 \geq 6 + \sum \frac{n_i(n_i-1)}{2} = 2 + \dim K \Leftrightarrow 2 \geq \sum \frac{n_i(n_i-1)}{2} = 2 + \dim K$ ovvero $4 \leq \dim K \leq 6$ condizione impossibile da soddisfare

In conclusione, tenendo in considerazione tutti gli assiomi enunciati, possiamo dire che $\mathcal{P}$ è uno spazio omogenero equivalente ad uno dei due spazi seguenti:

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$
$$\mathbb{R}^+ \times \frac{SL(2, \mathbb{R})}{SO(2)}$$

$\square$

Capitolo 5

Metriche invarianti

Dopo aver mostrato che le uniche due strutture di $\mathcal{P}$ che soddisfano i cinque assiomi dati sono (4.4) e (4.5), cerco di definire una metrica di Riemann su $\mathcal{P}$ che misuri la differenza percepita tra due colori in modo che anch'essa sia compatibile con gli assiomi 1-5. Al fine di ottenere che per ogni coppia di luci x, y percepite su sfondo b, a seguito di un cambiamento di sfondo g che porta b in $\tilde{b}$ non troppo differenti, si abbia $\tilde{x} = g(x)$ distante da $\tilde{y} = g(y)$ tanto quanto x dista da y, è necessario introdurre il seguente assioma:

Assioma 6. La metrica di Riemann G che misura la differenza percepita tra due colori, definita come in (1.1), è una metrica invariante rispetto a $GL(\mathcal{P})$; ovvero vale $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathcal{P}$ e per ogni $g \in GL(\mathcal{P})$

Prima di analizzare come questo assioma si ripercuote sui due spazi $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ permettendoci di determinare in modo unico una metrica di Riemann per entrambi, è necessario osservare come (1.11) si applica alle nostre ipotesi ovvero: scegliendo $X = Y = \mathcal{P}$ e $f = g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'applicazione di cambiamento di sfondo che dato l'assioma 6 è anche un'isometria, si ottiene

$$G_{g(x)}(dg_x(v), dg_x(w)) = G_x(v, w) \ \textit{per ogni} \ g \in GL(\mathcal{P}); x \in \mathcal{P}; v, w \in T_x\mathcal{P} \tag{5.1}$$

Dal momento che $\mathcal{P} = GL(\mathcal{P})/K$ è omogeneo rispetto a $GL(\mathcal{P})$ per l'assioma 5: per ogni $x, y \in \mathcal{P}$ esiste un cambiamento di sfondo $g \in GL(\mathcal{P})$ che porta x in y, $g(x) = y$; la metrica può essere definita ovunque a partire da G_x per un qualsiasi $x \in \mathcal{P}$ fissato. Quindi posso definire la metrica a partire da $x \in K$ in modo da ottenere che l'identità di $GL(\mathcal{P})$ appartenga alla sua classe di equivalenza perché per definizione si ha $g_I(x) = x$ per ogni $g_I \in K$. A seguito di questa scelta l'equazione 5.1 diventa:

$$G_x(dg_{Ix}(v), dg_{Ix}(w)) = G_x(v, w) \ \textit{per ogni} \ g_I \in K; x \in \mathcal{P}; v, w \in T_x\mathcal{P}$$

5.1 $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Analizzando per primo lo spazio $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, dal momento che $K = 0$ l'invarianza rispetto a K non produce alcun tipo di restrizioni per la metrica cercata; al contrario dall'invarianza rispetto a $GL(\mathcal{P})$ segue che la metrica cercata debba essere la somma di tre metriche

invarianti rispetto a $\mathbb{R}^+$ proporzionali tra di loro. Sapendo che una metrica $\mathbb{R}^+ - invariante$ su $\mathbb{R}^+$ è data da $ds^2 = \left(\frac{dx}{x}\right)^2$, la metrica che soddisfa l'assioma 6 su $\mathcal{P}_1$ è

$$\mathrm{d}s^2 = \alpha_1 \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}\right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{\mathrm{d}x_3}{x_3}\right)^2 \qquad con\ \alpha_k \in \mathbb{R}^+; k = 1, 2, 3 \tag{5.2}$$

Questa è la generalizzazione di Stiles della metrica di Helmholtz [Sil47], che corrisponde al caso particolare $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$; è inoltre da notare che la metrica in (5.2) ammette un unico arco geodetico per ogni coppia arbitraria di punti in $\mathcal{P}$: questo assicura che la definizione di distanza di Riemann tra due luci percepite come lunghezza dell'arco geodetico, vedi (1.1), sia ben definita.

5.2 $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}$

In merito al al secondo spazio da analizzare, osservo come lo spazio tangente T_x in $x \in \mathcal{P}_2$ possa essere visto come somma diretta tra $\mathbb{R}$ e un sottospazio di T_x di dimensione 2 tangente a $\frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}$ ovvero $T_x = \mathbb{R} \oplus T'_x$. Da questa osservazione segue che la restrizione della metrica a T'_x deve essere invariante rispetto a $SO(2)$, ovvero invariante rispetto alle rotazioni attorno all'origine in T'_x, quindi la metrica di $\mathcal{P}_2$ deve essere una somma di metriche euclidee di dimensione 1 e 2.

Prima di poter scrivere la metrica esplicitamente, è necessario introdurre una scrittura utile per lo spazio $\mathbb{R}^+ \times \frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}$.
Considerando l'insieme $\mathcal{M}$ delle matrici 2×2 reali simmetriche e definite positive e denotando con $\mathcal{N}$ il suo sottoinsieme contenente le matrici a determinante unitario, notoriamente isomorfo a $\frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}$, è possibile osservare che ogni matrice $x \in \mathcal{M}$ può essere scritta come $x = \det(x)\left(\frac{x}{\det(x)}\right)$, da cui segue

$$\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^+ \times \mathcal{N} \cong \mathbb{R}^+ \times \frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)} \overset{\mathbb{R}^+ \times SL(2,\mathbb{R}) = GL(2,\mathbb{R})}{\cong} \frac{GL(2,\mathbb{R})}{SO(2)} \cong \mathcal{P}_2$$

Da questo segue che l'azione di $GL(2,\mathbb{R})$ su $\mathcal{P}_2$ è data dalla funzione

$$\begin{aligned} GL(2,\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2 &\to \mathcal{P}_2 \\ (A, x) &\mapsto AxA^t \end{aligned}$$

Quindi ogni cambiamento di sfondo può essere parametrizzato attraverso una matrice $A \in GL(2,\mathbb{R})$ ovvero $g : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ associa ad x AxA^t. Inoltre è stato osservato che ogni metrica di Riemann invariante rispetto a $GL(2,\mathbb{R})$ su $\mathcal{P}_2$ può essere scritta come multiplo della metrica di Rao-Siegel [CO02]

$$\mathrm{d}s^2 = tr\left(x^{-1}\mathrm{d}x x^{-1}\mathrm{d}x\right) \tag{5.3}$$

dove con $tr(x)$ indico la traccia della matrice x.

Proposizione 5.1. *la metrica definita in 5.3 è invariante rispetto a* $GL(2,\mathbb{R})$

Dimostrazione. sia g un cambiamento di sfondo, sia $x \in \mathcal{P}_1$

$$g(x) = AxA^t \Rightarrow g^{-1}(x) = \left(A^t\right)^{-1} x^{-1} A^{-1}$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}gx = A\mathrm{d}xA^t$$
$$tr\left((gx)^{-1}\,\mathrm{d}gx\,(gx)^{-1}\,\mathrm{d}gx\right) =$$
$$= tr\left(\left(A^t\right)^{-1} x^{-1} \underbrace{A^{-1}A}_{I_2} \mathrm{d}x \underbrace{A^t\left(A^t\right)^{-1}}_{I_2} x^{-1} \underbrace{A^{-1}A}_{I_2} \mathrm{d}xA^t\right) =$$
$$= tr\left(\left(A^t\right)^{-1} x^{-1}\mathrm{d}xx^{-1}\mathrm{d}xA^t\right) \overset{matrici\ simili}{=} tr\left(x^{-1}\mathrm{d}xx^{-1}\mathrm{d}x\right)$$

□

Capitolo 6

Luminosità

6.1 Differenza di luminosità

Dati $\mathbf{x}$ una luce fisica e $\alpha > 0$ un numero reale positivo, allora le luci fisiche $\alpha\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}$ differiscono solo per la loro intensità. La differenza che viene percepita tra questi colori è chiamata luminosità e, in accordo con la definizione di metrica data nell'assioma 6, può essere misurata attraverso la distanza tra αx e x luci percepite in $\mathcal{P}$, ovvero:

$$d(\alpha x, x) = \int_x^{\alpha x} \mathrm{d}s$$

Quindi analizzando i vari spazi separatamente, per $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ con la metrica definita in (5.2) si ottiene:

$$d(\alpha x, x) = \int_1^{\alpha} \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}\, \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} = \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \int_1^{\alpha} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} = \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}\ |\log \alpha|$$

studiando invece lo spazio $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times SL(2, \mathbb{R}) / SO(2)$ con la metrica definita in (5.3) si ottiene:

$$d(\alpha x, x) = \int_1^{\alpha} \sqrt{tr \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} = \sqrt{2} \int_1^{\alpha} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} = \sqrt{2}\ |\log \alpha|$$

I due risultati possono essere riassunti con la seguente affermazione in cui $\alpha > 0$

$$d(\alpha x, x) = \gamma\ |\log \alpha|\,; \qquad \gamma = \begin{cases} \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} & \text{metrica (5.2)} \\ \sqrt{2} & \text{metrica (5.3)} \end{cases}$$

osserviamo quindi che la differenza di luminosità risulta direttamente proporzionale al logaritmo del rapporto tra le intensità, che corrisponde a quanto espresso dalla legge di Weber-Fechner, di cui abbiamo discusso a pagina 11.

Consideriamo ora il problema, più complicato, della differenza di luminositá tra due luci che differiscono, non solo per l'intensità, ma anche per tonalità e saturazione, ovvero luci eterocromatiche. Dati $x, y \in \mathcal{P}$ generici, la distanza percepita $d(x, y)$ misura contemporaneamente la

differenza cromatica e di luminosità tra x e y; si può inoltre osservare che, denotando $b(x,y)$ la differenza di luminosità di x relativa a y, $b^2(x,y) \leq d^2(x,y)$ dal momento che la luminosità influisce solo in parte nella differenza tra due luci percepite.

Per semplificare le notazioni da ora in poi possiamo considerare $\mathcal{P} \cong \mathbb{R}^+ \times \mathcal{M}$ dove

$$\mathcal{M} \cong \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \\ SL(2,\mathbb{R})/SO(2) & \mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \end{cases}$$

e "$\cong$" è usato con il siginificato di "isometrico a".
Da questo segue che $x \in \mathcal{P}$ può essere rappresentato in modo unico come

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (\xi, u); \qquad \xi \in \mathbb{R}^+, u \in \mathcal{M} \tag{6.1}$$

6.1.1 $\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

La riparametrizzazione esplicita è data da

$$\begin{cases} \xi = (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3})^{\frac{1}{3}} \\ x_1^\sigma = \xi u_1 \\ x_2^\sigma = \xi u_2 \end{cases} \qquad \sigma = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3} \tag{6.2}$$

Calcolo la distanza (5.2) nelle nuove coordinate (ξ, u). Per prima cosa ricavo x_3:

$$\xi = (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3})^{\frac{1}{3}}; \qquad \xi^3 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$$

$$x_3^{\alpha_3} = \frac{\xi^3}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}} \overset{x_1^\sigma = \xi u_1,\ x_2^\sigma = \xi u_2}{=} \frac{\xi^3}{(\xi u_1)^{\frac{\alpha_1}{\sigma}} (\xi u_2)^{\frac{\alpha_2}{\sigma}}} =$$

$$= \frac{\xi^{3-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sigma}}}{(u_1)^{\frac{\alpha_1}{\sigma}} (u_2)^{\frac{\alpha_2}{\sigma}}} \overset{\sigma = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}}{=} \frac{\xi^{\frac{\alpha_3}{\sigma}}}{(u_1)^{\frac{\alpha_1}{\sigma}} (u_2)^{\frac{\alpha_2}{\sigma}}}$$

da cui segue

$$x_3 = \frac{\xi^{\frac{1}{\sigma}}}{(u_1)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_3\sigma}} (u_2)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3\sigma}}} \tag{6.3}$$

Derivando le varie componenti di $x = (x_1, x_2, x_3)$ si ottengono:

$$\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{\sigma} u_1^{\frac{1}{\sigma}-1} \xi^\sigma \mathrm{d}u_1 + \frac{1}{\sigma} u_1^{\frac{1}{\sigma}} \xi^{\frac{1}{\sigma}-1} \mathrm{d}\xi = \frac{(u_1\xi)^{\frac{1}{\sigma}}}{\sigma} \left[\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} + \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right] = \frac{x_1}{\sigma}\left[\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} + \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right]$$

$$\mathrm{d}x_2 = \frac{x_2}{\sigma}\left[\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2} + \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right]$$

$$\mathrm{d}x_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{\xi^{\frac{1}{\sigma}-1}}{u_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_3\sigma}} u_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3\sigma}}} \mathrm{d}\xi - \frac{\alpha_1}{\alpha_3\sigma} \frac{\xi^{\frac{1}{\sigma}}}{u_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_3\sigma}-1} u_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3\sigma}}} \mathrm{d}u_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3\sigma} \frac{\xi^{\frac{1}{\sigma}}}{u_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_3\sigma}} u_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3\sigma}-1}} \mathrm{d}u_2 = \frac{x_3}{\sigma}\left[\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2}\right]$$

Quindi, sostituendo i risultati ottenuti nella metrica (5.2), otteniamo il seguente risultato nelle nuove coordinate:

$$\sigma^2 \mathrm{d}s^2 = \sigma^2 \alpha_1 \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\right)^2 + \sigma^2 \alpha_2 \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}\right)^2 + \sigma^2 \alpha_3 \left(\frac{\mathrm{d}x_3}{x_3}\right)^2 =$$

$$= \alpha_1 \left(\left[\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} + \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right]\right)^2 + \alpha_2 \left(\left[\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2} + \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right]\right)^2 + \alpha_3 \left(\left[\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2}\right]\right)^2 =$$

$$= \alpha_1 \left(\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1}\right)^2 + \alpha_1 \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right)^2 + \cancel{2\alpha_1 \left(\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right)} +$$

$$+ \alpha_2 \left(\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right)^2 + \cancel{2\alpha_2 \left(\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right)} +$$

$$+ \alpha_3 \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3}\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3}\left(\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2}\right)^2 +$$

$$\cancel{-2\alpha_1 \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1}\right)} - \cancel{2\alpha_2 \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2}\right)} + 2\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2}\right)$$

che può essere riscritto come

$$\sigma^2 \mathrm{d}s^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right)^2 +$$

$$+ \left[\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1}\right)^2 + 2\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2}\right) + \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2}\right)^2\right]$$

in modo da evidenziare come la distanza di Riemann sia composta da due termini che corrispondono ai due fattori della scomposizione precedentemente fatta, si può anche osservare come le nuove coordinate si comportano rispetto al cambio di illuminazione $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

$$\begin{cases} \xi & \mapsto & ((\lambda x_1)^{\alpha_1}(\lambda x_2)^{\alpha_2}(\lambda x_3)^{\alpha_3})^{\frac{1}{3}} = \lambda^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}}(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}) = \lambda^\sigma \xi \\ u_1 & \mapsto & \frac{(\lambda x_1)^\sigma}{\lambda^\sigma \xi} = \frac{\cancel{\lambda^\sigma} x_1^\sigma}{\cancel{\lambda^\sigma}\xi} = u_1 \\ u_2 & \mapsto & \frac{(\lambda x_2)^\sigma}{\lambda^\sigma \xi} = \frac{\cancel{\lambda^\sigma} x_2^\sigma}{\cancel{\lambda^\sigma}\xi} = u_2 \end{cases}$$

Questo mostra che la differenza di luminosità è espressa interamente in termini della coordinata ξ nella nuova parametrizzazione.

6.1.2 $\mathcal{M} \cong SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$

Considero nuovamente $\mathcal{P}$ come l'insieme della matrici 2×2 reali simmetriche $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix}$, su questo spazio posso definire nuovamente una riparametrizzazione $x \mapsto$

(ξ, u) con la proprietà osservata in precedenza per il caso 6.1.1

$$\begin{cases} \xi = |x|^{\frac{1}{2}} \\ u_1 = \frac{x_3}{x_2} \\ u_2 = \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{x_2} \end{cases} \quad [1] \tag{6.4}$$

È possibile dedurre che

$$x = \xi \begin{pmatrix} \frac{u_1^2+u_2^2}{u_2} & \frac{u_1}{u_2} \\ \frac{u_1}{u_2} & \frac{1}{u_2} \end{pmatrix} \qquad x^{-1} = \frac{1}{\xi} \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2} & -\frac{u_1}{u_2} \\ -\frac{u_1}{u_2} & \frac{u_1^2+u_2^2}{u_2} \end{pmatrix}$$

infatti

$$\xi \begin{pmatrix} \frac{u_1^2+u_2^2}{u_2} & \frac{u_1}{u_2} \\ \frac{u_1}{u_2} & \frac{1}{u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_3^2}{\cancel{\xi}}\frac{\cancel{\xi}\cancel{x_2}}{\cancel{\xi}} + \frac{\xi^2}{x_2} & \frac{x_3}{\cancel{\xi}}\frac{\cancel{\xi}}{\cancel{\xi}} \\ \frac{x_3}{\cancel{\xi}}\frac{\cancel{\xi}}{\cancel{\xi}} & \frac{\cancel{\xi}}{\cancel{\xi}}\frac{x_2}{\cancel{\xi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cancel{x_3^2}+x_1x_2-\cancel{x_3^2}}{x_2} & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} = x$$

Da questa osservazione si possono ricavare i valori di:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi\frac{u_1^2+u_2^2}{u_2} & \mathrm{d}x_1 &= \frac{u_1^2+u_2^2}{u_2}\mathrm{d}\xi + \frac{2\xi u_1}{u_2}\mathrm{d}u_1 + \xi\frac{u_2^2-u_1^2}{u_2^2}\mathrm{d}u_2 \\ x_2 &= \frac{\xi}{u_2} & \mathrm{d}x_2 &= \frac{1}{u_2}\mathrm{d}\xi - \frac{\xi}{u_2^2}\mathrm{d}u_2 \\ x_3 &= \xi\frac{u_1}{u_2} & \mathrm{d}x_3 &= \frac{u_1}{u_2}\mathrm{d}\xi + \frac{\xi}{u_2}\mathrm{d}u_1 - \frac{\xi u_1}{u_2^2}\mathrm{d}u_2 \end{aligned}$$

In questa parametrizzazione la distanza di Riemann definita in (5.3) diventa:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= tr\left(x^{-1}\mathrm{d}x x^{-1}\mathrm{d}x\right) = \\ &= tr\left(\frac{1}{|x|}\begin{pmatrix} x_2 & -x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 & \mathrm{d}x_3 \\ \mathrm{d}x_3 & \mathrm{d}x_2 \end{pmatrix}\frac{1}{|x|}\begin{pmatrix} x_2 & -x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 & \mathrm{d}x_3 \\ \mathrm{d}x_3 & \mathrm{d}x_2 \end{pmatrix}\right) = \\ &= tr\left[\frac{1}{|x|^2}\begin{pmatrix} x_2\mathrm{d}x_1 - x_3\mathrm{d}x_3 & x_2\mathrm{d}x_3 - x_3\mathrm{d}x_2 \\ x_1\mathrm{d}x_3 - x_3\mathrm{d}x_1 & x_1\mathrm{d}x_2 - x_3\mathrm{d}x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2\mathrm{d}x_1 - x_3\mathrm{d}x_3 & x_2\mathrm{d}x_3 - x_3\mathrm{d}x_2 \\ x_1\mathrm{d}x_3 - x_3\mathrm{d}x_1 & x_1\mathrm{d}x_2 - x_3\mathrm{d}x_3 \end{pmatrix}\right] \doteq \end{aligned}$$

[1] con $|X|$ si intende il determinante della matrice X

$$x_2\mathrm{d}x_1 - x_3\mathrm{d}x_3 =$$

$$= \frac{\xi}{u_2}\left(\frac{u_1^2+u_2^2}{u_2}\mathrm{d}\xi + \frac{2\xi u_1}{u_2}\mathrm{d}u_1 + \xi\frac{u_2^2-u_1^2}{u_2^2}\mathrm{d}u_2\right) - \xi\frac{u_1}{u_2}\left(\frac{u_1}{u_2}\mathrm{d}\xi + \frac{\xi}{u_2}\mathrm{d}u_1 - \frac{\xi u_1}{u_2^2}\mathrm{d}u_2\right) =$$

$$= \xi\frac{u_1^2+u_2^2}{u_2^2}\mathrm{d}\xi + \xi^2\frac{2u_1}{u_2^2}\mathrm{d}u_1 + \xi^2\frac{u_2^2-u_1^2}{u_2^3}\mathrm{d}u_2 - \xi\frac{u_1^2}{u_2^2}\mathrm{d}\xi - \xi^2\frac{u_1}{u_2^2}\mathrm{d}u_1 + \xi^2\frac{u_1^2}{u_2^3}\mathrm{d}u_2 =$$

$$= \xi^2\frac{u_1}{u_2^2}\mathrm{d}u_1 + \xi\mathrm{d}\xi + \xi^2\frac{1}{u_2}\mathrm{d}u_2$$

$$x_2\mathrm{d}x_3 - x_3\mathrm{d}x_2 =$$

$$= \frac{\xi}{u_2}\left(\frac{u_1}{u_2}\mathrm{d}\xi + \frac{\xi}{u_2}\mathrm{d}u_1 - \frac{\xi u_1}{u_2^2}\mathrm{d}u_2\right) - \xi\frac{u_1}{u_2}\left(\frac{1}{u_2}\mathrm{d}\xi - \frac{\xi}{u_2^2}\mathrm{d}u_2\right) =$$

$$= \xi\frac{u_1}{u_2^2}\mathrm{d}\xi + \xi^2\frac{1}{u_2^2}\mathrm{d}u_1 - \xi^2\frac{u_1}{u_2^3}\mathrm{d}u_2 - \xi\frac{u_1}{u_2^2}\mathrm{d}\xi + \xi^2\frac{u_1}{u_2^3}\mathrm{d}u_2 = \xi^2\frac{1}{u_2^2}\mathrm{d}u_1$$

$$-x_3\mathrm{d}x_1 + x_1\mathrm{d}x_3 =$$

$$= -\xi\frac{u_1}{u_2}\left(\frac{u_1^2+u_2^2}{u_2}\mathrm{d}\xi + \frac{2\xi u_1}{u_2}\mathrm{d}u_1 + \xi\frac{u_2^2-u_1^2}{u_2^2}\mathrm{d}u_2\right) + \xi\frac{u_1^2+u_2^2}{u_2}\left(\frac{u_1}{u_2}\mathrm{d}\xi + \frac{\xi}{u_2}\mathrm{d}u_1 - \frac{\xi u_1}{u_2^2}\mathrm{d}u_2\right) =$$

$$= -\xi\frac{u_1\left(u_1^2+u_2^2\right)}{u_2^2}\mathrm{d}\xi - 2\xi^2\frac{u_1^2}{u_2^2}\mathrm{d}u_1 - \xi^2\frac{u_1\left(u_2^2-u_1^2\right)}{u_2^3}\mathrm{d}u_2 + \xi\frac{u_1\left(u_1^2+u_2^2\right)}{u_2^2}\mathrm{d}\xi + \xi^2\frac{u_1^2+u_2^2}{u_2^2} +$$

$$-\xi^2\frac{u_1\left(u_1^2+u_2^2\right)}{u_2^3}\mathrm{d}u_2 = \xi^2\frac{u_2^2-u_1^2}{u_2^2}\mathrm{d}u_1 - 2\xi^2\frac{u_1}{u_2}\mathrm{d}u_2$$

$$-x_3\mathrm{d}x_3 + x_1\mathrm{d}x_2 =$$

$$= \xi\frac{u_1}{u_2}\left(\frac{u_1}{u_2}\mathrm{d}\xi + \frac{\xi}{u_2}\mathrm{d}u_1 - \frac{\xi u_1}{u_2^2}\mathrm{d}u_2\right) + \xi\frac{u_1^2+u_2^2}{u_2}\left(\frac{1}{u_2}\mathrm{d}\xi - \frac{\xi}{u_2^2}\mathrm{d}u_2\right) =$$

$$= -\xi\frac{u_1^2}{u_2^2}\mathrm{d}\xi - \xi^2\frac{u_1}{u_2^2}\mathrm{d}u_1 + \xi^2\frac{u_1^2}{u_2^3}\mathrm{d}u_2 + \xi\frac{u_1^2+u_2^2}{u_2^2}\mathrm{d}\xi - \xi^2\frac{u_1^2+u_2^2}{u_2^3}\mathrm{d}u_2 =$$

$$= -\xi^2\frac{u_1}{u_2}\mathrm{d}u_1 + \xi\mathrm{d}\xi - \xi^2\frac{1}{u_2}\mathrm{d}u_2$$

$$\doteq \frac{1}{|x|^2}tr\left[\begin{pmatrix} \xi^2\frac{u_1}{u_2^2}\mathrm{d}u_1 + \xi\mathrm{d}\xi + \xi^2\frac{1}{u_2}\mathrm{d}u_2 & \xi^2\frac{1}{u_2^2}\mathrm{d}u_1 \\ \xi^2\frac{u_2^2-u_1^2}{u_2^2}\mathrm{d}u_1 - 2\xi^2\frac{u_1}{u_2}\mathrm{d}u_2 & -\xi^2\frac{u_1}{u_2}\mathrm{d}u_1 + \xi\mathrm{d}\xi - \xi^2\frac{1}{u_2}\mathrm{d}u_2 \end{pmatrix}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\xi^4}\left[\xi^4\frac{u_1^2}{u_2^4}\left(\mathrm{d}u_1\right)^2 + \xi^2\left(\mathrm{d}\xi\right)^2 + \xi^4\frac{1}{u_2^2}\left(\mathrm{d}u_2\right)^2 + 2\xi^3\frac{u_1}{u_2^2}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}\xi + 2\xi^3\frac{1}{u_2}\mathrm{d}u_2\mathrm{d}\xi + 2\xi^4\frac{u_1}{u_2^3}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 +\right.$$

$$+\xi^4\frac{u_2^2-u_1^2}{u_2^4}\left(\mathrm{d}u_1\right)^2 - 2\xi^4\frac{u_1}{u_2^3}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 + \xi^4\frac{u_2^2-u_1^2}{u_2^4}\left(\mathrm{d}u_1\right)^2 - 2\xi^4\frac{u_1}{u_2^3}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 +$$

$$\left.+\xi^4\frac{u_1^2}{u_2^4}\left(\mathrm{d}u_1\right)^2 + \xi^2\left(\mathrm{d}\xi\right)^2 + \xi^4\frac{1}{u_2^2}\left(\mathrm{d}u_2\right)^2 - 2\xi^3\frac{u_1}{u_2^2}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}\xi - 2\xi^3\frac{1}{u_2}\mathrm{d}u_2\mathrm{d}\xi + 2\xi^4\frac{u_1}{u_2^3}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\right] =$$

$$= 2\frac{u_2^2}{u_2^4}\left(\mathrm{d}u_1\right)^2 + 2\frac{1}{\xi^2}\left(\mathrm{d}\xi\right)^2 + 2\frac{1}{u_2^2}\left(\mathrm{d}u_2\right)^2 = 2\left[\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right)^2 + \frac{\left(\mathrm{d}u_1\right)^2 + \left(\mathrm{d}u_2\right)^2}{u_2^2}\right]$$

Che si può riassumere, normalizzando la metrica, con

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right)^2 + \left[\frac{(\mathrm{d}u_1)^2 + (\mathrm{d}u_2)^2}{(u_2)^2}\right] \tag{6.5}$$

Anche in questo caso è possibile osservare che anche nelle rispetto alle nuove coordinate la differenza di luminosità è espressa solo in termini della coordinata ξ, infatti:

$$\begin{cases} \xi & \mapsto & \sqrt{det\,(\lambda x)} = \sqrt{\lambda x_1 \lambda x_2 - (\lambda x_3)^2} = \lambda\xi \\ u_1 & \mapsto & \frac{\lambda x_3}{\lambda x_2} = u_1 \\ u_2 & \mapsto & \frac{\lambda\xi}{\lambda x_2} = u_2 \end{cases}$$

A partire da questi ragionamenti, si può definire in modo naturale la luminosità relativa tra due luci percepiti come colori diversi $x, y \in \mathcal{P}$:

$$b\,(x,y) = \chi \log \frac{\xi}{\eta} \qquad \text{dove} \quad \begin{matrix} x = (\xi, u) \\ y = (\eta, v) \end{matrix} \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{M};$$

$$\chi = \begin{cases} \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} & \mathcal{M} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \sqrt{2} & \mathcal{M} = SL\,(2,\mathbb{R})\,/SO\,(2) \end{cases}$$

Modello di Poincaré

Definendo il numero complesso $z = u_1 + iu_2$ e indicando con $\bar{z}$ suo complesso coniugato, allora la restrizione della metrica (6.5) ad $\mathcal{M}$ è l'espressione racchiusa tra le parentesi quadre che diventa $\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}}{(\mathrm{Im}z)^2}$ dove $\mathrm{Im}z$ denota la componente immaginaria di z. Dal momento che la matrice x è definita positiva allora $\mathbb{H} = \mathrm{Im}z = u_2 > 0$, quindi segue che il piano complesso superiore $\{\,z|\,\mathrm{Im}z > 0\}$ munito della metrica precedentemente definita è isomorfo al semipiano di Poincaré, spazio due-dimensionale con curvatura negativa costante. Nei capitoli seguenti utilizzeremo l' osservazione fatta in questo paragrafo.

6.2 Superfici a luminosità costante

Legge di Abney. *sia $c \in \mathcal{P}$ una luce percepita usata come riferimento*
sia $b\,(x,c)$ la luminosità relativa di x rispetto a c
allora per ogni $x, y \in \mathcal{P}$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ si ha che

$$b\,(\alpha x + \beta y, c) = \alpha b\,(x,c) + \beta b\,(y,c)$$ *[Abn12]*

Osservazione 6.1. sotto la legge di Abney l'insieme delle luci percepite ad una determinata luminosità è l'intersezione di un piano in $\mathcal{V}$ con il cono $\mathcal{P}$ delle luci percepite

Dimostrazione. siano $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{P}$ base per $\mathcal{V}$
ogni $x \in \mathcal{P}$ può essere scritto come $x = \sum_{k=1}^{3} \xi_k e_k$
da cui segue che $b\,(x,c) = \sum_{k=1}^{3} \xi_k b\,(e_k, c) = \beta$, con β fissato
dove $\sum_{k=1}^{3} \xi_k b\,(e_k, c) = \beta$ è l'equazione di un piano □

Come é possibile vedere nelle seguenti sezioni, la Legge di Abney non è valida per gli esperimenti di *color matching*.

6.2.1 $\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Dati $c = (\gamma, v)$; $x = (\xi, u) \in \mathcal{P}$ si ha che $b(x,c) = \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \log\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)$, dunque la superficie a luminosità costante β è $\{x \in \mathcal{P} \mid b(x,c) = \beta\}$ ovvero:

$$\left\{x \in \mathcal{P} \,\middle|\, \chi \log\left(\frac{\xi}{\gamma}\right) = \beta\right\} = \left\{x \in \mathcal{P} \,\middle|\, \chi \log\left(\frac{(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3})^{1/3}}{\gamma}\right) = \beta\right\} =$$
$$= \left\{x \in \mathcal{P} \,\middle|\, \frac{(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3})^{1/3}}{\gamma} = \mathrm{e}^{\frac{\beta}{\chi}}\right\} = \left\{x \in \mathcal{P} \,\middle|\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = \gamma^3 \mathrm{e}^{3\frac{\beta}{\chi}}\right\} \cong \mathcal{M}$$
$$\text{con } \chi = \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

6.2.2 $\mathcal{M} \cong SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$

Dati $c = (\gamma, v)$; $x = (\xi, u) \in \mathcal{P}$ si ha che $b(x,c) = \sqrt{2} \log\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)$, dunque la superficie a luminosità costante β è $\{x \in \mathcal{P} \mid b(x,c) = \beta\}$ ovvero:

$$\left\{x \in \mathcal{P} \,\middle|\, \chi \log\left(\frac{|x|^{1/2}}{\gamma}\right) = \beta\right\} = \left\{x \in \mathcal{P} \,\middle|\, |x| = \gamma^2 \mathrm{e}^{\frac{2\beta}{\chi}}\right\} \cong \mathcal{M} \tag{6.6}$$
$$\text{con } \chi = \sqrt{2}$$

Osservazione 6.2. scegliendo c in modo che $\gamma = \frac{\chi}{\sqrt{2}} = 1$ si ottiene da (6.6):

$\beta(x) = \chi \log\left(\frac{|x|^{1/2}}{\gamma}\right) = \sqrt{2} \log\left(|x|^{1/2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \log|x|$

da cui segue

$$e^{\beta(x+y)} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \log|x+y| = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left|x^{1/2}\left(I + x^{-1/2} y x^{-1/2}\right) x^{1/2}\right| =$$
$$= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left|x^{1/2}\right| \left|x^{1/2}\right| \left|I + x^{-1/2} y x^{-1/2}\right| \underset{u = I + x^{-1/2} y x^{-1/2} \in \mathcal{P}}{=}$$
$$= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} |x| \left(1 + tr(u) + |u|\right) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} |x| \left(1 + tr\left(x^{-1} y\right) + \frac{|y|}{|x|}\right) =$$
$$= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} |x| \left(\frac{1}{|y|} + \frac{tr\left(x^{-1} y\right)}{|y|} + \frac{1}{|x|}\right) |y|$$

quindi si ottiene

$$\beta(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\beta(x) + \beta(y) + \log\left(\frac{1}{|y|} + \frac{tr\left(x^{-1} y\right)}{|y|} + \frac{1}{|x|}\right)\right]$$

Osservazione 6.3. sia $a \in \mathcal{P}$

sia $g : x \mapsto a^{1/2} x a^{-1/2}$ tale che $g \in GL(\mathcal{P})$

allora si ha $\beta\left(a^{1/2} x a^{-1/2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \log\left|a^{1/2} x a^{-1/2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \log\left(|x|\,|a|\right) =$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\log|x| + \log|a|\right) = \beta(x) + \beta(a)$$

Questo mostra che, a seguito di un cambiamento di sfondo, la luminosità di x è cambiata per una costante che non dipende da x.

Capitolo 7

Algebre di Jordan e luminosità

Nel capitolo precedente gli argomenti sono stati affrontati due volte, una per ogni modello dello spazio $\mathcal{P}$ dei colori percepiti; quindi può essere utile indicare entrambi i modelli in un modo uniforme utilizzando le algebre di Jordan e il loro esponenziale. Dunque, considerando:

- dato $\alpha > 0$ definisco la funzione $\psi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}_\alpha$
  $$a \mapsto \alpha a$$
  dove $\mathfrak{U}_\alpha$ è un algebra di Jordan con unità $\frac{1}{\alpha}$, quindi è possibile definire
  $\exp \mathfrak{U}_\alpha = \{\exp(\alpha a) \,|a \in \mathbb{R}\} = \{(\exp a)^\alpha |\, a \in \mathbb{R}\} = \{x^\alpha |\, x \in \exp \mathbb{R}\}$
  $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \overset{def}{=} \mathfrak{U}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{U}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{U}_{\alpha_3}$
  $\exp(\mathfrak{U}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}) = \{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} |\, x_i \in \mathbb{R}^+, \alpha_i \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

- $\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \overset{def}{=} \mathfrak{h}(2, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici simmetriche
  $\exp(\mathfrak{h}(2,\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} = X \middle| X \text{ definita positiva} \right\} = \mathbb{R}^+ \times \frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}$

Quindi si ha che $\exp \mathfrak{U} = \mathcal{P}$ lo spazio dei colori percepiti per entrambe le definizioni di $\mathfrak{U}$.

Osservazione 7.1. dalla definizione 36 di $P(a)$ e considerando $\mathfrak{U} = \mathfrak{h}(r, \mathbb{R})$
si ha $P(a)\, b = a \cdot b \cdot a$ per ogni $a, b \in \mathfrak{h}(r, \mathbb{R})$

Osservazione 7.2. il gruppo $GL(\exp \mathfrak{U})$ è generato dalla mappa $P(a)$ per $a \in \mathfrak{U}$
$\exp(\mathfrak{U})$ è omogeneo rispetto a $GL(\exp \mathfrak{U})$ e
$GL(\exp \mathfrak{U})$ è una metrica invariante su $\exp(\mathfrak{U})$ data da

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\left(P^{-1}(x)\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}x\right)$$

Assioma 7. la luminosità $\beta(x)$ di $x \in \mathcal{P}$ relativa all'unità $c \in \mathcal{P}$ è una funzione
differenziabile che soddisfa $\beta\left(P\left(a^{1/2}\right) x\right) = \beta(x) + \chi(a)$
dove $\chi(a)$ dipende solo dal cambio di illuminazione di sfondo $x \mapsto P\left(a^{1/2}\right) x$

Ma si può osservare che se $x = c$ allora per definizione si ha $\beta(x) = 0$ dal momento che c è il riferimento per la luminosità, inoltre sapendo che $P\left(a^{1/2}\right) c = a$ si ha

$$\beta(a) = \beta\left(P\left(a^{1/2}\right) c\right) = 0 + \chi(a)$$

quindi la proprietà di β enunciata dall'assioma 7 diventa

$$\beta\left(P\left(a^{1/2}\right)x\right)=\beta(x)+\beta(a) \tag{7.1}$$

Definisco ora la funzione $\varphi(x)=e^{\beta(x)}$ allora 7.1 è equivalente a

$$\varphi\left(P\left(a^{1/2}\right)x\right)=\varphi(a)\varphi(x)$$

osservo inoltre che dati $a=\alpha c; x=\beta c$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ si ha

$$\varphi\left(P\left(a^{1/2}\right)x\right)=\varphi(\alpha\beta c)=\varphi(\alpha c)\varphi(\beta c)$$

Osservazione 7.3. considero $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$
$\alpha\mapsto\varphi(\alpha c)=e^{\beta(\alpha c)}$
quindi si ha 1. $h(\alpha_1\alpha_2)=h(\alpha_1)h(\alpha_2)$
2. $h(\alpha)=\alpha^\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

Dimostrazione. 1. $h(\alpha_1\alpha_2)=\varphi(\alpha_1\alpha_2C)\overset{c=c^2}{=}\varphi(\alpha_1c)\varphi(\alpha_2c)=h(\alpha_1)h(\alpha_2)$
2. derivo $h(\alpha_1\alpha_2)$ rispetto ad α_2
$\alpha_1h'(\alpha_1\alpha_2)=\alpha_1\lim\limits_{d\to0}\dfrac{h(\alpha_1\alpha_2+d)-h(\alpha_1\alpha_2)}{d}=$
$=\alpha_1\frac{h(\alpha_1)}{\alpha_1}\lim\limits_{d\to0}\dfrac{h\left(\alpha_2+\frac{d}{\alpha_1}\right)-h(\alpha_2)}{\frac{d}{\alpha_1}}=h(\alpha_1)h'(\alpha_2)$
sostituendo $\alpha_2=c$ ottengo $\alpha h'(\alpha)=h(\alpha)h'(c)$
indicando $h'(c)=\lambda\in\mathbb{R}$ si ha $\displaystyle\int\frac{h'(\alpha)}{h(\alpha)}\mathrm{d}\alpha=\lambda\int\frac{1}{\alpha}$
$\log|h(\alpha)|=\lambda\log|\alpha|+c$ ovvero $e^{\log|h(\alpha)|}=e^{\lambda\log|\alpha|+c}$
$h(\alpha)=\alpha^\lambda\cdot e^c$ dal momento che $h(\alpha_1\alpha_2)=h(\alpha_1)h(\alpha_2)$
si può avere soltanto $e^c=0$ assurdo, la funzione sarebbe nulla
$e^c=1$ cioè $h(\alpha)=\alpha^\lambda$ □

In particolare si ha $\varphi(\alpha c)=\varphi\left(P\left(\alpha^{1/2}c\right)x\right)=\varphi(\alpha c)\varphi(x)=\alpha^\lambda\varphi(x)$, φ è una funzione omogenea di ordine λ, ovvero $\varphi(x)=|x|^{\frac{\lambda}{r}}$ con $x\in\exp\mathfrak{h}(r,\mathbb{R})$, e differenziabile perché lo è β.

Teorema 7.4. *sia X lo spazio delle matrici reali $n\times n$*
sia $\Phi:X\to\mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che
i. $\Phi(x)>0$ *per ogni* $x\in X$ *con* $\det x\neq0$
ii. $\Phi(xy)=\Phi(x)\Phi(y)$ *per ogni* $x,y\in X$
allora Φ è della forma $\Phi(x)=\det x^\lambda$ *per qualche* $\lambda\in\mathbb{R}$

Quindi si hanno i seguenti due casi:

1. $\mathcal{P}=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$
$\varphi(x)=|x^\alpha|^\lambda=(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3})^\lambda$

2. $\mathcal{P} = \mathfrak{h}^{+}(2, \mathbb{R})$
   $\varphi(x) = |x^{\alpha}|^{\frac{\lambda}{2}}$

In conclusione si ottiene:

$$\beta(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} \log |x| & x \in \exp \mathfrak{h}(2, \mathbb{R}) \\ \lambda \log (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}) & (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{+} \end{cases}$$

Capitolo 8

Appendice

8.1 Tonalità e saturazione

8.1.1 $\mathfrak{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Abbiamo visto in (5.2) che la metrica definita su $\mathcal{P}_1 = \exp \mathfrak{U}$ è data da $\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{x_i} \right)^2$, che corrisponde al modello di Stiles; possiamo assumere, senza perdita di generalità, gli α_i tutti uguali a 1 riducendoci alla metrica di Helmholtz utilizzando la funzione ψ_α definita nel capitolo precedente. Introduciamo inoltre su $\exp \mathfrak{U}$ la norma ridotta $|x| = x_1 x_2 x_3$.

Se $\mathfrak{U}$ denota un'algebra di Jordan formalmente reale, allora la mappa

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{U} &\to \exp \mathfrak{U} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

è biettiva quindi la sua mappa inversa log è ben definita e vale

$$\begin{aligned} \log : \exp \mathfrak{U} &\to \mathfrak{U} \\ y &\mapsto \log y \end{aligned}$$

Definisco ora il seguente sottoinsieme di $\mathcal{P}_1 = \exp \mathfrak{U} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$:

$$\mathcal{N} = \{x \in \exp \mathfrak{U} : |x| = 1\}$$

che è la superficie a luminosità costante che contiene l'unità $c = (1, 1, 1)$. Allora si può osservare che $\exp \mathfrak{U} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{N}$ un prodotto di spazi omogenei.

Definisco ora il sottoinsieme di $\mathfrak{U}$:

$$\log \mathcal{N} = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathfrak{U} : |e^y| = 1\} = \{\, y \in \mathfrak{U} |\, e^{y_1} e^{y_2} e^{y_3} = 1\} = \{\, v \in \mathfrak{U} |\, y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$$

che si può facilmente notare essere un piano in $\mathbb{R}^3$; inoltre dato che l'unità c è inclusa in $\mathcal{N}$ si ha che $\log c = (0, 0, 0) \in \log \mathcal{N}$ e la restrizione a $\log \mathcal{N}$ del *pull-back* a $\mathfrak{U}$ della metrica (5.2) con

gli $\alpha_i = 1$ è:

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{x_i} \right)^2 \text{ su } \exp \mathfrak{U} \overset{y=\log x}{\to} \mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3} (y_i)^2 \text{ su } \mathfrak{U}: \text{ metrica euclidea}$$

Quindi si ha che $\mathcal{N}$ è isomorfo ad uno spazio euclideo di dimensione due: questo fatto può essere utilizzato per definire i concetti di tonalità e saturazione. Per prima cosa introduciamo in modo unico su $\log \mathcal{N}$ le coordinate polari (ρ, θ) dove ρ rappresenta la misura della distanza euclidea da $0 \in \mathfrak{U}$; mentre, una volta scelto un orientamento su $\log \mathcal{N}$ e un raggio principale, θ rappresenta l'angolo rispetto al raggio fissato. Dal momento che possiamo rappresentare in modo unico ogni $x \in \exp \mathfrak{U} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{N}$ come coppia (ξ, u) con $\xi \in \mathbb{R}^+;\ u \in \mathcal{N}$,

<u>Def</u> 41. la tonalità di x relativa all'unità $c \in \mathcal{P}_1$ è definita come l'angolo θ di $\log u$

<u>Def</u> 42. la saturazione di x relativa all'unità $c \in \mathcal{P}_1$ è definita come la distanza radiale ρ di $\log u$

8.1.2 $\mathfrak{U} = \mathfrak{h}(2, \mathbb{R})$

Quasi analogamente al caso precedente definisco su $\mathcal{P}_2 = \exp \mathfrak{U}$ la norma ridotta

$$|x| = x_1 x_2 - x_3^2 \text{ per ogni } x = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}^+(2, \mathbb{R})$$

e introduco inoltre l'insieme

$$\mathcal{N} = \{x \in \exp \mathfrak{U} : |x| = 1\}$$

che è isomorfo al semipiano di Poincaré come mostrato nel paragrafo 6.1.2 o equivalentemente al disco unitario

$$\mathcal{D} = \{ z \in \mathbb{C} | \, z\bar{z} < 1\} \text{ munito della metrica } \mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}z \mathrm{d}\bar{z}}{1 - z\bar{z}} \tag{8.1}$$

dal momento che la mappa $w \mapsto \dfrac{w-i}{w+i} = z$ porta il semipiano complesso superiore nel disco $\mathcal{D}$ e porta la metrica di Poincaré in (8.1).

Nuovamente possiamo rappresentare in modo unico ogni $x \in \mathcal{P}_2$ come la coppia (ξ, u) dove $\xi \in \mathbb{R}^+$ e $u \in \mathcal{N}$. Poiché $\mathcal{N}$ è isomorfo al disco $\mathcal{D}$ su cui posso introdurre le coordinate polari (ρ, θ)

<u>Def</u> 43. la tonalità di x relativa all'unità $c \in \mathcal{P}_2$ è definita come l'angolo θ del corrispettivo di u sul disco $\mathcal{D}$

<u>Def</u> 44. la saturazione di x relativa all'unità $c \in \mathcal{P}_2$ è definita come la distanza $d(u, c)$ su $\mathcal{N}$ con la metrica invariante indotta

8.2 Cenni di analisi delle scene visive

Nei capitoli precedenti abbiamo sempre studiato come definire le proprietà di una singola luce percepita in uno sfondo uniforme. L'obiettivo di questo capitolo è analizzare una generica scena visiva $\mathcal{S}$.

Consideriamo per semplicità che la scena visiva $\mathcal{S}$ mostrata abbia solo un numero finito di luci percepite $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{P}$ (come accade per le immagini digitali composte da un numero finito di pixel); per ognuna di esse considero la quantità μ_k definita come il rapporto tra l'area della scena in cui è presente la luce x_k e l'area totale della scena, queste grandezze soddisfano la relazione $\sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1$. Denoto con $d(x, y)$ la distanza tra x e y in una metrica invariante rispetto a $GL(\mathcal{P})$, definisco il colore medio $\bar{x}(\mathcal{S})$ della scena $\mathcal{S}$ come

$$\bar{x}(\mathcal{S}) = \arg\min_{x \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n} \mu_k d^2(x_k, x)$$

Si può osservare che, se $\mathcal{P}$ fosse uno spazio euclideo e d una metrica euclidea, allora $\bar{x}$ sarebbe il baricentro della distribuzione dei punti x_k con massa μ_k.

Osservazione 8.1. consideriamo una scena visiva $\mathcal{S}$ costituita da luci finite e che differiscono solo per l'intensità, ovvero, prese due luci qualsiasi, queste saranno proporzionali tra di loro, quindi possiamo considerare $x_k = \alpha_k x$ per ogni k e per un certo $x \in \mathcal{P}$. Si ottiene

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k d^2(x_k, \bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k d^2(\alpha_k x, \bar{x})$$

ovvero il minimo è raggiunto per un certo $\bar{x} = \bar{\alpha} x$ e il valore minimizzante $\bar{\alpha}$ può essere trovato come segue:

$$\Phi(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k d^2(\alpha_k x, \bar{\alpha} x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \chi^2 \log^2\left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_k}\right)$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}\Phi(\bar{\alpha})}{\mathrm{d}\bar{\alpha}} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \chi^2 2 \log\left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_k}\right) \frac{\alpha_k}{\bar{\alpha}} \frac{1}{\alpha_k}$$

$$\text{da cui segue} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \chi^2}{\bar{\alpha}} 2 \log \bar{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \chi^2}{\bar{\alpha}} 2 \log \alpha_k$$

$$\log \bar{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \log \bar{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \log \alpha_k$$

Il motivo per cui abbiamo introdotto il color medio $\bar{x}(\mathcal{S})$ della scena $\mathcal{S}$ è l'adattamento cromatico dell'occhio umano, infatti l'osservatore percepirà $\bar{x}$ come se fosse il "bianco standard" della scena. Questo concetto viene formalizzato introducendo un nuovo assioma:

Assioma 8. se $\mathcal{S}$ è una scena visiva generica, allora $\bar{x}(\mathcal{S})$ è considerato la luce bianca standard per l'osservatore

Si può quindi dedurre che, nel momento in cui l'osservatore identifica $\bar{x}$ come bianco standard, identifica anche quel punto con l'unità c dell'algebra di Jordan $\mathfrak{U}$ associata a $\mathcal{P}$. Questo permette all'osservatore di classificare tutte le luci percepite secondo la loro luminosità, tonalità e saturazione come definite nei capitoli precedenti e ciò consente di poter fare un collegamento tra una teoria astratta e le misure sperimentali.

8.3 Geodetiche e colori complementari

Osservazione 8.2. Le geodetiche su $\exp \mathfrak{U}$ che passano per l'unità c sono tutte della forma $x(\tau) = \exp(\tau a)$ dove

- a indica il vettore di lunghezza 1 tangente alla geodetica nel punto $x = c$, la condizione sulla lunghezza è equivalente a $\sigma\left(a^2\right) = 1$ dove σ è la traccia ridotta, vedi definizione 39
- τ è la misura della lunghezza dell'arco rispetto alla metrica invariante

La distanza τ di c da $x(\tau)$ può essere scritta in modo esplicito a partire da $\log x(\tau) = \tau a$; quindi si ha $\sigma\left(\log^2 x(\tau)\right) = \sigma\left((\tau a)^2\right) = \tau^2 \sigma\left(a^2\right) = \tau^2$ da cui segue $d(c, x) = \sigma^{1/2}\left(\log^2 x\right)$.

Ora immaginiamo di collegare $x \in \mathcal{P}$ a c mediante la geodetica $x(\tau) = \exp(\tau a)$, allora continuando l'arco oltre a c con la curva $x(-\tau) = \exp(-\tau a)$ e denoto con x^* il punto sull'arco che verifica $d(c, x^*) = d(c, x)$

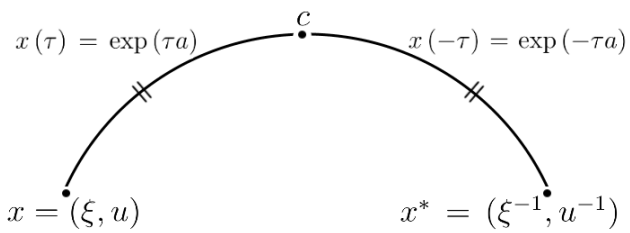

Figura 8.1: rappresentazione grafica di due colori *opposti*

Se le coordinate di x rispetto alla decomposizione $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{N}$ sono $x = (\xi, u)$ allora si ha $x^* = \left(\xi^{-1}, u^{-1}\right)$ dove u^{-1} denota l'inversa di u considerato come elemento nella algebra di Jordan $\mathfrak{U}$.

Osservazione 8.3. L'inversa di Jordan è un'isometria per ogni metrica invariante rispetto a $GL(\mathcal{P})$

Dimostrazione. Si ha che $\mathrm{d}x^{-1} = -P^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$, quindi se $y = x^{-1}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \sigma\left(\left(P^{-1}(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y\right) = \sigma\left(\left(P^{-1}\left(x^{-1}\right)\mathrm{d}x^{-1}\right)\mathrm{d}x^{-1}\right) = \\
&= \sigma\left(\left(P(x)\,P^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(P^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)\right) = \\
&= \sigma\left(\mathrm{d}x\left(P^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)\right) = \sigma\left(\left(P^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

□

Da questo segue:

1. $d(c,u) = d\left(c,u^{-1}\right)$, ossia x e x^* hanno la stessa saturazione
2. $\log u^{-1} = -\log u$, quindi la tonalità di x^* é complementare alla tonalità di x
3. $(\exp \tau a)^{-1} = \exp -\tau a$ da cui segue $x^* = x^{-1}$

Questo dimostra che x e x^{-1} sono percepiti come colori con la stessa saturazione, tonalità complementare e luminosità complementare se considerata relativamente a c.

Possiamo immaginare che la mappa che associa x^{-1} a x corrisponda alla mappa che trasforma una fotografia nel suo negativo e viceversa.

8.4 Un esempio

Consideriamo tre stanze come in figura, in cui ogni muro in comune ha un foro piccolo. Supponiamo che ogni stanza sia illuminata da una luce bianca differente dalle altre, percepita come w_E, w_1, w_2 dai rispettivi osservatori $1, 2, E$; ognuno di loro è in grado di vedere attraverso il foro una "macchia" di colore proveniente dalle altre stanze. Il riferimento dell'esperimento è l'osservatore E che determina la relazione tra lo sfondo e le luci provenienti dai fori.

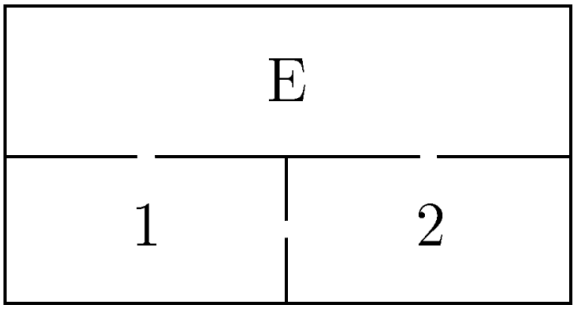

Figura 8.2: schema dell'esperimento svolto dai due osservatori

Per semplicità assumiamo che le luci w_E, w_1, w_2 abbiano tutte la stessa luminosità, quindi, senza perdita di generalità, possiamo assumere che tutte e tre le luci percepite siano contenute nell'insieme $\mathcal{N}$.

Dal momento che l'analisi della situazione nello spazio $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ viene effettuata su $\mathcal{N}$ isometrico ad uno spazio euclideo, studio esclusivamente il caso in cui $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+ \times \frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}$ in cui $\mathcal{N}$ è isomorfo al disco unitario $\mathcal{D}$ con la metrica di Poincaré.

Gli archi geodetici in questa metrica corrispondono agli archi di circonferenza ortogonali a quella unitaria, quindi, se considero la situazione precedente posso pensare al colore percepito w_E come all'origine del disco $\mathcal{D}$; di conseguenza ottengo che la tonalità di w_1 rispetto a w_E è indicata come l'angolo tra il semiasse positivo delle ascisse e il raggio passante per w_2, mentre la saturazione di w_1 rispetto a w_E è la distanza di Poincaré tra w_1 e w_E; analogamente per w_2.

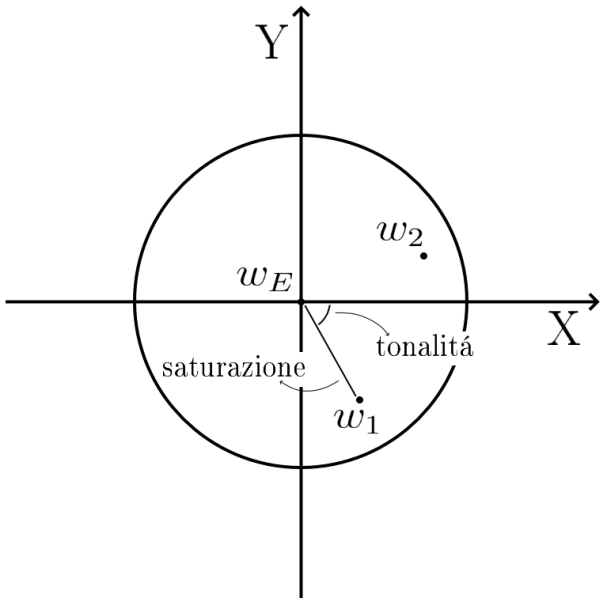

Figura 8.3: disco di Poincaré in cui sono inserite le luci percepite dagli osservatori

Inoltre si ha che le geodetiche vengono portate dalle isometrie di $\mathcal{D}$ in altre geodetiche, da cui segue che w_1 vede w_2 lungo un arco di geodetica che collega i due punti e, analogamente, w_2 vede w_1 lungo lo stesso arco percorso in direzione opposta come si può vedere dal seguente schema

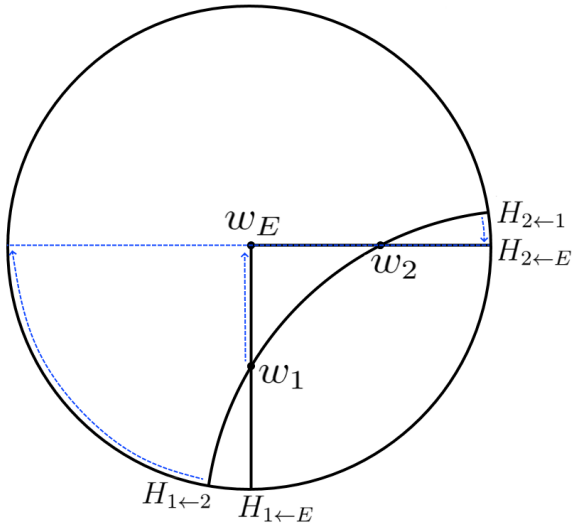

Figura 8.4: disco di Poincaré in cui sono inserite anche le tonalità percepite

dove con $H_{2\leftarrow E}$ si intende la tonalità di w_2 percepita da w_E. Si può inoltre osservare, come

mostrato in figura utilizzando il colore blu, che se w_1 o w_2 sono spostate verso w_E tramite un'isometria, la geodetica che li congiunge diventa un diametro del disco $\mathcal{D}$ quindi $H_{2\leftarrow 1}$ e $H_{1\leftarrow 2}$, sono visti come colori complementari dagli osservatori in 1 e in 2 ma non dall'osservatore in E.

8.5 Un esperimento critico

Può essere interessante cercare di determinare quale tra i due modelli di $\mathcal{P}$ è la rappresentazione più accurata del fenomeno della percezione del colore. Quindi lo scopo di questo paragrafo è di mostrare una distinzione tra i due modelli.

Supponiamo che x, y, z siano tre colori con la stessa luminosità; quindi possiamo assumere, senza perdita di generalità che $x, y, z \in \mathcal{N}$. Come modello di $\mathcal{N}$ possiamo scegliere:

I. lo spazio euclideo $\mathcal{R}^2$, dopo l'introduzione di un appropriato isomorfismo ψ_{α_k} dell'algebra di Jordan $\mathcal{R}$ che porti la metrica di Stiles in quella di Helmholtz

II. il disco di Poincaré $\mathcal{D}$

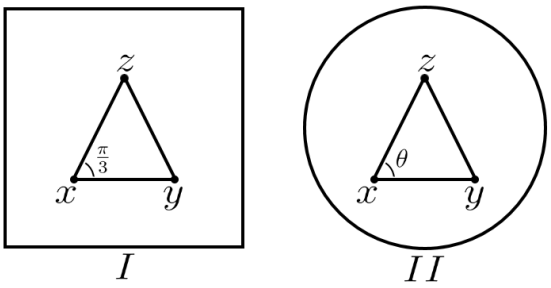

Figura 8.5: possibili rappresentazioni di un triangolo nello spazio del colore

Siano x, y, z ai vertici di un triangolo equilatero come mostrato in figura, supponiamo che le distanze dei punti siano incrementate senza un limite superiore mantenendo fissa la condizione: $d(x, y) = d(y, z) = d(z, x)$. Studiando il caso euclideo, si ha che l'osservatore posto in x continua a vedere y e z con le tonalità che differiscono di un angolo di $\frac{\pi}{3}$, mentre, studiando il caso non-euclideo, si ha che, all'aumentare dei lati del triangolo, l'angolo θ si avvicina sempre più a zero, quindi le tonalità di y e z convergono.

Queste osservazioni mostrano delle proprietà intrinseche dei due modelli e dovrebbero garantire la possibilità di escludere uno dei due modelli a partire da un esperimento che metta in mostra in quale dei due modi la percezione umana del colore si comporta.

Bibliografia

[Abn12] William De Wiveleslie Abney. Trichromatic theory of colour vision.—the measurement of retinal fatigue. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 87(597):415–427, 1912.

[Ari96] Aristotele. *L'Anima. Traduzione introduzione e commento a cura di Giancarlo Movia.* Loffredo, 1996.

[Ber20] Michel Berthier. Geometry of color perception. part 2: perceived colors from real quantum states and hering's rebit. *The Journal of Mathematical Neuroscience*, 10(1):1–25, 2020.

[Bru15] Nicola Bruno. Elementi di psicofisica. 2015.

[Cir19] Fiammetta Cirrone. Modelli geometrici nella teoria della percezione del colore: analisi del modello di h. resnikoff. 2019.

[CO02] Miquel Calvo and Josep M Oller. A distance between elliptical distributions based in an embedding into the siegel group. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 145(2):319–334, 2002.

[Cor14] M Corradi. La teoria dei colori di Johann Wolfgang von Goethe. *Colore e colorimetria. Contributi multidisciplinari, Vol. XA*, pages 401–712, 2014.

[Cor21] Daniele Corradetti. Complexification of the exceptional Jordan algebra and its application to particle physics. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*, 61:1–16, 2021.

[Cro99] Robert A Crone. Hering's four-color theory zone theories. In *A History of Color: The Evolution of Theories of Lights and Color*, pages 165–174. Springer, 1999.

[Des01] René Descartes. *Discourse on method, optics, geometry, and meteorology.* Hackett Publishing, 2001.

[Far15] Patricia Fara. Newton shows the light: a commentary on newton (1672)'a letter... containing his new theory about light and colours...'. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 373(2039):20140213, 2015.

[Goe97] Johann Wolfgang Goethe. *La storia dei colori. A cura di Renato Troncon.* Luni Editrice, 1997.

[Gue86] Henry Guerlac. Can there be colors in the dark? physical color theory before newton. *Journal of the History of Ideas*, 47(1):3–20, 1986.

[Hur69] Leo M Hurvich. Hering and the scientific establishment. *American Psychologist*, 24(5):497, 1969.

[IHKM12] Noor A Ibraheem, Mokhtar M Hasan, Rafiqul Z Khan, and Pramod K Mishra. Understanding color models: a review. *ARPN Journal of science and technology*, 2(3):265–275, 2012.

[Jor20] Alberto Jori. La teoria aristotelica dei colori tra fisica e fisiologia. *Medicina nei Secoli*, 32(2):491–542, 2020.

[JvNW93] Pascual Jordan, John von Neumann, and Eugene P Wigner. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *The collected works of Eugene Paul Wigner: Part A: The scientific papers*, pages 298–333, 1993.

[Kra75] David H Krantz. Color measurement and color theory: I. representation theorem for grassmann structures. *Journal of Mathematical Psychology*, 12(3):283–303, 1975.

[Mac42] David L MacAdam. Visual sensitivities to color differences in daylight. *Josa*, 32(5):247–274, 1942.

[McC04] Kevin McCrimmon. *A taste of Jordan algebras*, volume 1. Springer, 2004.

[MH19] Curtis E Margo and Lynn E Harman. Helmholtz's critique of Goethe's Theory of Color: more than meets the eye. *Survey of ophthalmology*, 64(2):241–247, 2019.

[Mol03] John D Mollon. The origins of modern color science. In *The science of color*, pages 1–39. Elsevier, 2003.

[Pla03] Platone. *Timeo. Traduzione introduzione e commento a cura di Francesco Fronterotta.* Rizzoli, 2003.

[Pro20] Edoardo Provenzi. Geometry of color perception. part 1: structures and metrics of a homogeneous color space. *The Journal of Mathematical Neuroscience*, 10(1):1–19, 2020.

[Pro21] Edoardo Provenzi. La matematica del colore, 2021. `https://maddmaths.simai.eu/la-matematica-del-colore/`.

[Res74] Howard L Resnikoff. Differential geometry and color perception. *Journal of Mathematical Biology*, 1:97–131, 1974.

[Sch94] Erwin Schrödinger. On the relationship of four-color theory to three-color theory. *Color Research and Application*, 19(1):37, 1994.

[SG31] Thomas Smith and John Guild. The CIE colorimetric standards and their use. *Transactions of the optical society*, 33(3):73, 1931.

[Sil47] Ludwik Silberstein. Notes on ws stiles' paper entitled,"a modified helmholtz line-element in brightness-colour space"*, 1. *JOSA*, 37(4):292–295, 1947.

[War83] Frank W Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media, 1983.

[Wri29] William David Wright. A re-determination of the trichromatic coefficients of the spectral colours. *Transactions of the Optical Society*, 30(4):141, 1929.

[Zem05] Gábor Á Zemplén. *The history of vision, colour, & light theories: introductions, texts, problems*. Bern studies in the history and philosophy of science, 2005.

Elenco delle figure

1 schizzo dell'esperimento di scomposizione della luce fatto da Newton; http://www.departments.bucknell.edu/history/carnegie/newton/refraction.html . . . 7
2 rappresentazione del cerchio cromatico di Newton; http://www.didatticarte.it/Blog/?p=6746 . . . 8
3 ruota di Maxwell; https://maddmaths.simai.eu/wp-content/uploads/2021/10/colortop-300x193.jpg . . . 10
4 Spettro elettromagnetico e luce visibile . . . 11
5 rappresentazione alternativa dello spazio dei colori secondo Hering . . . 13
6 spazio tridimensionale standard in cui sono inserite le coordinate del colore . . . 14
7 schema dell'esperimento svolto da Wright e Guild . . . 15
8 grafico con le curve dei coefficienti di 10 osservatori sovrapposte; [Wri29] . . . 16
9 spazio di Munsell . . . 17
10 funzioni normalizzate che rappresentano lo spettro di reazione alle diverse lunghezze d'onda dei tre coni; https://en.wikipedia.org/wiki/File:Cones_SMJ2_E.svg . . . 17
11 ellissi di McAdam; https://luminusdevices.zendesk.com/hc/article_attachments/4414846806285/mceclip3.png . . . 18
12 cubo normalizzato $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ dello spazio dei colori . . . 19
13 tre funzioni per il *color matching* nello spazio XYZ . . . 20
14 rappresentazione dello spazio XYZ mostrando il legame con lo spazio RGB . . . 20
15 rappresentazione dello spazio CIEL*u*v*; https://www.benq.eu/it-it/knowledge-center/knowledge/define-accurate-color.html . . . 21
16 due rappresentazioni differenti dello spazio CIEL*a*b*; https://mimoriarty.wordpress.com/2011/11/21/a-space-of-possibilities-cielab/ https://www.benq.eu/it-it/knowledge-center/knowledge/define-accurate-color.html . . . 22
17 rappresentazione dello spazio HSI . . . 23

4.1 esempio di come il cambiamento di sfondo influisca sulla percezione del colore: i colori centrali sono esattamente identici 41

8.1 rappresentazione grafica di due colori *opposti* 63
8.2 schema dell'esperimento svolto dai due osservatori 64
8.3 disco di Poincaré in cui sono inserite le luci percepite dagli osservatori 65
8.4 disco di Poincaré in cui sono inserite anche le tonalità percepite 65
8.5 possibili rappresentazioni di un triangolo nello spazio del colore 66

Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare va al professore Giovanni Mongardi, relatore di questa tesi, per avermi dato la possibilità di svilupparla approfondendo un argomento a cui tenevo particolarmente: lo spazio del colore; per avermi spronata a portarla a termine anche quando capire determinati aspetti di teoria sembrava quasi impossibile; per essersi sempre reso disponibile con pazienza e dedizione.

Un grande grazie va a tutta la mia famiglia e ai miei nonni per aver creduto in me e per essere così orgogliosi della donna che sono diventata. In particolare a mia mamma, lei mi ha sostenuta e incoraggiata a dare sempre il meglio di me, soprattutto quando ansie e paure mi limitavano portandomi quasi ad abbandonare la carriera universitaria.

Un grazie va anche a tutti i miei amici per i momenti di svago tra un esame e l'altro, tra un lavoro e un altro; in particolare grazie a Lorenzo.

Ci tengo a ringraziare la professoressa Emiliana Bonacquisti, che mi ha invogliata a cercare di comprendere la matematica che sapevo usare negli esercizi e incuriosita a scoprire altre sue sfaccettature.

Vorrei ringraziare inoltre Barbara che con grande pazienza ha letto tutta la mia tesi aiutandomi ad esprimermi al meglio.

Infine, ma non per importanza, vorrei ringraziare me stessa.