Un'anima **romantica** e **lacerata dal dubbio**.
Uno dei massimi ingegni della sua epoca.
Ecco perché la Matematica e la Scienza
devono **così tanto** a Sofia Kovalevskaja.

Il senso di Sofia per la Matematica

ROBERTO NATALINI

Per chi non si occupa di storia della Matematica è sempre un po' strano e sorprendente conoscere la vita di qualcuno che ha dimostrato i teoremi che si studiano nei corsi universitari di base. Diversamente dalla Filosofia, e forse dalla Fisica, in Matematica spesso si sa pochissimo degli autori dei teoremi famosi. Un po' perché quasi sempre l'attribuzione è accidentale: a occhio direi che il 90% dei teoremi che ha il nome di qualcuno in realtà è stato dimostrato per la prima volta da qualcun altro: il Teorema di De l'Hôpital è stato dimostrato da Bernoulli e il Teorema di Rolle da Cauchy ben cento anni dopo la morte del supposto autore. Un po' perché forse prevale l'idea che, più ancora dei diamanti, i teoremi siano eterni e per sempre, e quindi più che di "autori" di teoremi sia corretto parlare di "scopritori", la cui vita non è di nessuna importanza (con l'eccezione forse di Évariste Galois, e più recentemente di John Nash e Alan Turing, ma qui direi che tanto ha fatto il cinema).
Però la foto di Sofia Kovalevskaja, senza troppe precisazioni sull'epoca in cui era vissuta, me la ricordo da studente appesa in qualche corridoio del Dipartimento di Matematica, forse perché spiccava, tra le facce baffute e/o le teste calve dei tanti matematici maschi del passato. E potevo associare facilmente questo volto ad almeno un teorema, il famoso Teorema di Cauchy-Kovalevskaja, che si trovava per esempio nel capitolo 2 del libro di Treves sulle equazioni alle derivate parziali. Intanto non immaginiamoci che Cauchy e Kovaleskaja si siano mai incontrati. Augustin-Louis Cauchy, uno dei più grandi e famosi matematici al mondo, morì nel 1857, quando Sofia aveva solo 7 anni. Il teorema è invece contenuto in un articolo pubblicato nel 1875 sul

famoso *Journal für die reine und angewandte Mathematik* ed era uno dei risultati principali della tesi di dottorato di Sofia, discussa l'anno prima. Oggi, viste le condizioni in cui è stato dimostrato, lo chiameremmo Teorema di Kovalevskaja e basta, ma prima di parlare della sua originalità cerchiamo di capire di cosa si tratta effettivamente.
Per questo è utile fare un passo indietro. Il teorema fondamentale dell'algebra ci dice che esistono sempre *m* soluzioni complesse, eventualmente coincidenti, di un'equazione algebrica a coefficienti complessi di grado *m* del tipo:

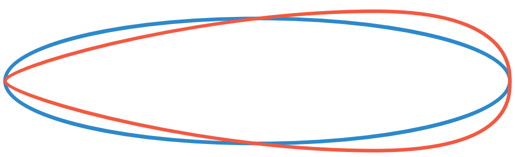
$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x = 0$$

Vogliamo sapere cosa succede quando l'incognita è invece una funzione *f* di una variabile *t* che risolve un'equazione basata su un polinomio di ordine *m* nelle derivate in *t* di *f* del tipo

$$\frac{d^m}{dt}f(t) = F(t,\frac{d^{m-1}}{dt}f(t),\ldots,f)$$

Molte delle equazioni della fisica che si conoscevano nel '700/'800 per problemi con una sola variabile – tipicamente il tempo – si potevano scrivere in questo modo: il moto del pendolo, il moto dei pianeti, il moto di una palla di cannone. Nel 1835 Cauchy aveva dimostrato che è sempre possibile risolvere questa equazione assegnando il valore della funzione in un punto t_0, insieme al valore delle sue derivate fino all'ordine *m-1* sempre in t_0, in un certo intervallo di tempo che lo contiene, e lo faceva approssimando la soluzione con serie di potenze convergenti. A prima vista questo risultato può sembrare di scarso interesse: abbiamo un'equazione che descrive un fenomeno fisico reale, per esempio un pendolo che oscilla. Vorremmo sapere come è fatta la soluzione, non ci interessa sapere che esiste: ci sembra ovvio, visto che il pendolo semplicemente oscilla e basta. E avremmo torto. Proprio Cauchy aveva capito per primo che era fondamentale assicurarsi innanzitutto del fatto che la soluzione esistesse e fosse unica.
Nel 1842 aveva poi esteso il risultato al caso in cui la funzione *f* dipenda anche da variabili spaziali. Per esempio per le vibrazioni di una corda, per le onde elettromagnetiche o per le equazioni dei gas e dei liquidi. Ma il suo risultato non era completo. Quando Sofia Kovalevskaja studiò questo problema, spinta dal suo maestro Karl Weierstrass, non conosceva questo risultato di Cauchy, ma subito si accorse che nel tentativo di generalizzare in modo diretto quello che valeva per la sola variabile tempo qualcosa non andava. Applicando il metodo di Cauchy alla famosa equazione di propagazione del calore proposta nel 1820 da Jean Baptiste Fourier, la serie di potenze che doveva rappresentare la soluzione per certi valori del dato iniziale convergeva solo al tempo *t=0*. Sembrava un paradosso e Weierstrass rimase molto stupito quando la Kovalevskaja gli presentò questo controesempio. Ma lei non si fermò qui: dimostrò infatti che l'equazione con le derivate parziali doveva avere una forma particolare, che da allora si chiama "forma normale", e che era possibile dimostrare che - in un certo intorno del punto iniziale - esisteva un'unica soluzione ottenuta tramite serie di potenze convergente. Sofia non si era dunque limitata a mettere in bella copia le idee di Cauchy ma aveva isolato per la prima volta l'insieme di ipotesi che permettevano di dimostrare in modo rigoroso l'enunciato. Inoltre, il suo controesempio garantiva che si trattava di ipotesi veramente necessarie.

Le ellissi di Laplace diventano gli ovoidi di Kovalevskaja



Sofia Kovalevskaja

Vogliamo conoscere altri due risultati importanti di Kovalevskaja? Il primo è curioso. Nel 1799 un altro matematico famoso, il marchese di Laplace, aveva dimostrato che se gli anelli di Saturno erano fatti di un liquido, allora – in prima approssimazione – dovevano avere una sezione trasversale ellittica. Kovalevskaja migliorò i calcoli e riuscì a dimostrare che la sezione doveva invece essere di forma ovoidale.
In realtà la storia è più complicata (Saturno ha molti anelli costituiti da frammenti di roccia) ma per ora può bastare, perché dobbiamo terminare la nostra breve gita con l'articolo che avrebbe permesso a Sofia di vincere il premio Bordin dell'Accademia Francese delle Scienze. Si trattava di migliorare la comprensione del moto di un corpo solido intorno a un punto fisso. Fino ad allora c'erano solo due casi in cui si era capito come descrivere in modo completo il moto di un solido rotante, scrivendo le soluzioni delle equazioni del moto. Eulero aveva descritto il caso in cui un corpo ruota intorno al suo baricentro. Lagrange invece aveva scelto di descrivere quella che noi chiamiamo trottola, ossia un corpo con simmetria di rotazione in cui il punto fisso di appoggio è quello in cui poggia a terra.
Sofia scoprì un nuovo tipo di trottola per cui era ancora possibile descrivere esplicitamente il movimento dell'oggetto. Questa trottola all'epoca si poteva solo immaginare (ma oggi si può vedere in un'animazione virtuale: *https://av.tib.eu/media/10361*) ed era caratterizzata dal fatto che due dei tre momenti di inerzia erano uguali tra loro e il terzo era la metà dei primi due. Sotto queste condizioni Sofia fu capace di trovare un modo di risolvere "esplicitamente" il sistema di equazioni differenziali che risultava, usando nuovi tipi di funzione. Questo avrebbe portato non solo alla scoperta di questa nuova trottola ma soprattutto a una nuova idea di integrabilità di un sistema dinamico. Il dato veramente notevole è che quasi un secolo dopo è stato possibile dimostrare che se l'equazione dei solidi rotanti può essere risolta in modo esplicito (si dice "di Liouville") allora sono possibili solo tre casi: Eulero, Lagrange e Kovalevskaja. Sofia non poteva fare meglio di così!

Una possibile versione della Trottola di Kovalevskaja