STRANE STORIE MATEMATICHE

«Una, nessuna e centomila»... altezze di un triangolo

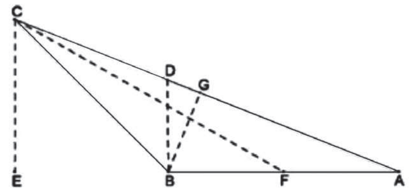
di Giulia Lisarelli, Elisa Miragliotta,
Anna Baccaglini-Frank e Pietro Di Martino

La ricerca in Didattica della Matematica ha ampiamente documentato e studiato le difficoltà degli studenti nel tracciare e riconoscere le altezze di un triangolo. Le difficoltà più ricorrenti e trasversali nei diversi livelli scolari riguardano il caso dei triangoli ottusangoli e dei triangoli rettangoli e sono principalmente riconducibili a due fattori strettamente intrecciati: l'influenza delle due direzioni verticale e orizzontale che gli studenti percepiscono come privilegiate (Mesquita, 1998) e l'influenza di particolari rappresentazioni di un concetto che diventano popolari e comuni al punto da diventare «*il* concetto» stesso (Hershkowitz, 1989).

Nel panorama italiano Sbaragli (2017) ha sottolineato come, al termine della scuola primaria, gli studenti sviluppino un concetto di altezza di un poligono fortemente legato a rappresentazioni stereotipate. Tali concezioni sono spesso frutto di una definizione di altezza univoca, presentata agli studenti insieme a rappresentazioni tutte molto simili tra loro. Questo risulta abbastanza evidente guardando, per esempio, le illustrazioni di molti libri di testo, in cui tipicamente l'altezza è disegnata come un segmento parallelo al margine verticale del foglio su cui il triangolo è rappresentato o pensando alle rappresentazioni di altezze di triangoli che sfruttano manipolativi come il filo a piombo. In generale, sia pratiche didattiche come quelle descritte sia le esperienze spaziali collezionate durante le attività quotidiane anche fuori dall'ambito scolastico tendono a portare ad una concettualizzazione dello spazio *spontanea* che può non essere del tutto coerente rispetto a quella geometrica (Mariotti, 2005). Nel caso delle altezze questo fenomeno conduce spesso gli studenti «a pensare a segmenti 'perpendicolari' come ad una coppia di segmenti disposti nella direzione verticale ed orizzontale» (Baccaglini-Frank et al., 2013, p. 69), che è coerente con una concettualizzazione dello spazio esperita nel mondo fisico, ma non rispetto allo spazio euclideo in cui non si hanno direzioni privilegiate (Mariotti, 2005).

Quanto riportato non avrà sorpreso quanti di voi si confrontano giornalmente con studenti che, di fronte alla richiesta di tracciare le altezze di un triangolo, producono disegni che appaiono incoerenti agli occhi dell'esperto. Le rilevazioni nazionali INVALSI confermano le difficoltà brevemente descritte. Ad esempio, portiamo l'attenzione sul quesito D15 incluso nella prova del 2013, per il grado 6, che riguarda il riconoscimento delle altezze di un triangolo ottusangolo. Di seguito il quesito nella formulazione originale.

D15. Osserva la figura.



Quale, tra le seguenti coppie di segmenti, rappresenta due delle altezze del triangolo ABC?

A. ☐ **CE e CF**

B. ☐ **BD e BG**

C. ☐ **CE e BG**

D. ☐ **CF e BD**

Figura **1** – Quesito INVALSI, rilevazione 2013 per il grado 6

Allo studente si chiede di indicare una coppia di segmenti che rappresentano due delle altezze del triangolo ABC, scegliendo una ed una sola risposta tra le 4 possibili. Di queste, le prime due riportano coppie di segmenti con un estremo in comune, la terza che fa riferimento ai segmenti CE e BG è la risposta corretta e la quarta include due segmenti di cui nessuno è un'altezza.

Dai dati del campione nazionale emerge come questo quesito sia risultato relativamente difficile, infatti le risposte degli studenti sono così distribuite:

A. 28% B. 18,5% C. 34,8% D. 15%

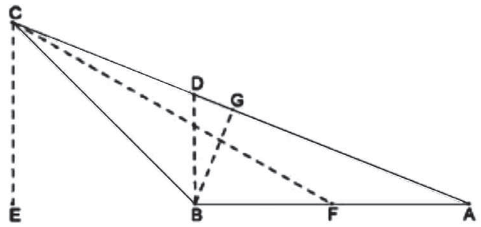
Nonostante la domanda coinvolga elementi geometrici che possiamo considerare molto familiari per gli studenti, la percentuale di risposte corrette è inferiore al 35% del campione e la percentuale di risposte errate è abbastanza uniformemente distribuita sui distrattori.

Suggeriamo ai lettori di provare a descrivere possibili ragionamenti di coloro che hanno preferito le opzioni A, B, o D. Proponiamo, inoltre, ai lettori di chiedersi che cosa potrebbero dire gli studenti se fosse chiesto loro di argomentare a favore o contro la possibilità che ciascuno dei quattro segmenti sia una delle altezze del triangolo.

Una formulazione del quesito in forma aperta potrebbe rivelare meglio i modi di pensare e le difficoltà degli studenti e di conseguenza essere più efficace dal punto di vista didattico anche ai fini della valutazione degli apprendimenti (per es., Di Martino & Baccaglini-Frank, 2017).

Dunque, lanciamo ora la *sfida* ai lettori per la prossima uscita, proponendo il seguente quesito:

Osserva il disegno:



I quattro segmenti tratteggiati sono tutti altezze del triangolo ABC?
Spiega perché.

Figura **2** – Riformulazione in forma aperta proposta in classi II di scuola secondaria di I grado

Questa riformulazione del quesito in forma aperta è stata proposta in diverse classi seconde di scuola secondaria di primo grado (grado 7) a conclusione di un percorso sulle altezze di triangoli. Grazie alla richiesta di argomentare le proprie scelte, gli studenti sono stati coinvolti in una discussione collettiva durante la quale si sono confrontati sulla possibilità che ciascun segmento tratteggiato in figura rappresentasse un'altezza di ABC. In particolare, in tutte le classi il segmento BD ha generato il maggior dibattito e la produzione di una pluralità di argomenti. A questo proposito, riportiamo le affermazioni di quattro studenti che mostrano diverse posizioni emerse.

Alberto dice: «BD sì, perché guarda, se guardi il lato eh...il lato BA ehm forma l'angolo retto»
Luca ribatte: «Forma un angolo retto però non va fino in cima al triangolo»

Lavinia dice: «Tu hai presente che puoi fare un sacco di altezze infinite?»
Alice dice: «BD non può essere una altezza, perché deve arrivare almeno fino a… all'intersezione»

Spunti di riflessione per il lettore:
- Proporresti questo quesito al tuo livello scolare? In quale delle due formulazioni? Perché?
- Quali pensi sarebbero le risposte e le difficoltà dei tuoi studenti? Quali argomenti userebbero per spiegare le loro risposte?
- Tra le affermazioni di Alberto, Luca, Lavinia e Alice quali ti colpiscono di più? Quale interpretazione daresti?

Invitiamo inoltre il lettore a proporre il quesito, in una delle due formulazioni, ai propri studenti e a documentare ciò che emerge in classe.

Risposte ai commenti dei lettori

Il prof. Toccafondo, che ringraziamo per i commenti condivisi all'indirizzo strane.storie.matematiche@gmail.com, ci ha segnalato un errore nell'articolo *Strane storie matematiche «22 : 5 = 4 r 2» Ma siamo proprio sicuri che si scriveva così?* («Archimede», 1/2022): abbiamo scritto che la divisione è chiusa nei razionali, in realtà doveva intendersi in Q\(0). Volevamo infatti sottolineare la differenza dei numeri razionali e dei numeri interi rispetto alla moltiplicazione: per ogni numero razionale diverso da 0, infatti, esiste un numero razionale che è il suo inverso rispetto alla moltiplicazione, cosa non vera se ci si restringe all'insieme dei numeri interi. Ma ovviamente questa proprietà non vale per lo 0.

Vorremmo poi rispondere anche all'altra interessante questione sollevata dal prof. Toccafondo rispetto all'uso del trattino obliquo invece dello zero. Innanzitutto siamo d'accordo con lei! L'esempio a pagina 24 della Strana Storia è tratto da un libro italiano e l'abbiamo scelto per criticarlo. In particolare noi abbiamo messo in discussione l'uso del segno «=», ma siamo d'accordo che anche l'uso del trattino invece dello zero può essere (inutilmente) problematico. Ci viene in mente, in particolare, il caso in cui alla fine dello svolgimento di una divisione con resto zero compaia il trattino e «nessun resto», che è diverso da «resto zero». Attualmente nelle nostre sperimentazioni in PerContare non sono state riscontrate contraddizioni di questo tipo, probabilmente perché nelle guide didattiche non facciamo uso del trattino, ma sempre e solo di «0».

Giulia Lisarelli
giulia.lisarelli@dm.unipi.it
Elisa Miragliotta
elisa.miragliotta@unipv.it
Anna Baccaglini-Frank
anna.baccaglinifrank@unipi.it
Pietro Di Martino
pietro.dimartino@unipi.it

Riferimenti bibliografici

Baccaglini-Frank, A., Di Martino, P., Maffei, L., Mariotti, M.A., Pezzia, M., Signorini, G., & Zan, R. (2013), *Le prove INVALSI come risorsa didattica in classe. Prove 2013 per il primo ciclo*. Report - ricerca azione disponibile al seguente link: fox.dm.unipi.it/invalsi.

Di Martino, P. & Baccaglini-Frank, A. (2017), *Beyond performance results: analyzing the informational and the developmental potentials of standardized mathematics tests*, «For the Learning of Mathematics», 37(3), pp. 6-11.

Hershkowitz, R. (1989), *Visualization in Geometry: Two Sides of the Coin*, «Focus on learning problems in mathematics», 11, pp. 61-76.

Mariotti, M.A. (2005), *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*, Bologna: Pitagora Editrice.

Mesquita, A.L. (1998), *On conceptual obstacles linked with external representation in geometry*, «The Journal of Mathematical Behavior», 17(2), pp. 183-195.

Sbaragli, S. (2017), *Convinzioni di allievi e docenti sul concetto di altezza di poligoni*, «L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate», Vol. 40(2) A-B, pp. 227-248.