STRANE STORIE MATEMATICHE
Conclusione di «Una, nessuna e centomila... altezze di un triangolo» e lancio de «I palloncini di Rubiera»

di Giulia Lisarelli, Elisa Miragliotta, Fabio Brunelli

Nell'ultima uscita di *Strane Storie Matematiche* abbiamo lasciato il lettore ponendo l'attenzione sulla nozione di altezza relativa ad un lato del triangolo. Abbiamo presentato e discusso alcune delle ragioni per le quali riconoscere e tracciare correttamente le altezze di un poligono possa essere un compito difficile per gli studenti. Nel caso dei triangoli, le difficoltà sono particolarmente evidenti e trasversali rispetto ai diversi gradi di scolari. Sia l'esperienza nelle classi, sia, più in generale, la ricerca nazionale ed internazionale in Didattica della Matematica (e.g., Gutiérrez & Jaime, 1999; Hershkowitz, 1989; Sbaragli, 2017) mostrano come spesso la nozione di altezza sia strettamente intrecciata a particolari rappresentazioni che gli studenti reputano più comuni, frequenti e, di conseguenza, privilegiate. In particolare, sovente l'altezza per gli studenti: deve partire da un vertice; è interna al triangolo e non coincidente con alcun lato; è necessariamente (o preferibilmente) verticale; è una sola (tranne, per alcuni, nel caso del triangolo equilatero).

I disegni (Figura 1) realizzati da studenti di una classe seconda di scuola secondaria di primo grado mostrano bene alcune di queste caratteristiche.

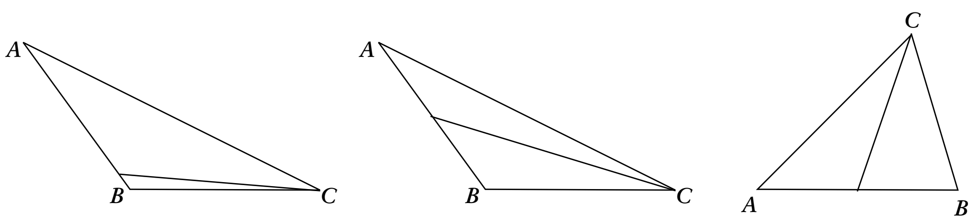


Figura **1** – Alcuni disegni di altezze relative al lato AB realizzati dagli studenti

A partire dalla consapevolezza di come le esperienze spaziali scolastiche ed extrascolastiche possano alimentare e concorrere a costruire l'idea di altezza appena descritta, è possibile progettare un percorso che affronti proprio le criticità messe in luce dalla ricerca, come anticipato nell'uscita precedente. Un aspetto utile da inserire in una tale progettazione è la possibilità di offrire agli studenti più di una caratterizzazione di altezza, accompagnata da molteplici rappresentazioni, cercando di evitare o rimuovere gli stereotipi più comuni. Infatti: «Un suggerimento in questo senso riguarda la proposta di un approccio alla geometria che privilegi l'introduzione dei concetti geometrici come emergenti dalla modellizzazione di situazioni problematiche dello spazio fisico, piuttosto che come elementi astratti caratterizzati da oscure definizioni» (Baccaglini-Frank et al., 2013, p. 74).

Si inserisce in questo scenario il percorso didattico ([1]) realizzato da Federica e Martina, le insegnanti dei quattro studenti di scuola secondaria di primo grado di cui abbiamo riportato gli interventi nell'ultima uscita di questa rubrica. Al fine di far emergere le idee degli studenti, nella fase preliminare del percorso le insegnanti hanno promosso una discussione in classe su come si potrebbe definire l'altezza di un triangolo e poi, più in generale, di un poligono. A fronte di questo stimolo, è ragionevole aspettarsi che gli studenti parlino dell'altezza facendo riferimento alla gravità, a una direzione «orizzontale» e una «verticale» (accompagnando le loro affermazioni con gesti che coinvolgono mani e braccia e che rispecchiano queste due direzioni), a un oggetto tracciato «dall'alto verso il basso» o viceversa, di «lunghezza verticale», a una «lunghezza da una base ad un punto sopra».

Un esempio che emerge spesso è quello dell'altezza di una persona, che gli studenti definiscono come la misura «dal piede fino alla testa» o «dal pavimento alla testa». Nelle classi sperimentali l'insegnante ha proposto di esplorare questa idea chiedendo ad uno studente di stendersi a terra e ai suoi compagni di determinare la sua altezza. Si è dunque aperta una ricca discussione con diversi punti di vista: per alcuni studenti l'altezza resta sempre invariata, essendo una caratteristica della persona comunque sia messa (sdraiata o in piedi); per altri nella nuova posizione l'altezza andava «dalla schiena alla pancia»; altri ancora hanno dichiarato che «dipende dal punto di osservazione». A sottolineare la distanza tra l'idea di altezza nella vita quotidiana e in matematica, alcuni studenti hanno affermato che l'altezza del compagno non poteva cambiare, mentre per la geometria sì, perché in geometria è sempre «da sotto a sopra». Attorno allo stesso stimolo gli studenti si sono chiesti se ogni oggetto abbia sempre e solo *una* altezza. Per alcuni «un oggetto con due punte, ha due altezze», per altri invece va considerata sempre solo l'altezza massima, alcuni si sono spinti a pensare che in certi casi le altezze possano essere infinite, ad esempio nel caso di una matita inclinata (Figura 2) rispetto al piano di appoggio (e non perpendicolare ad esso). Riportiamo di seguito alcuni estratti della discussione in una classe sperimentale.

Stud.1: Ma se noi tipo abbiamo questa matita, una cosa così e la pieghiamo così [*fa dei gesti con una matita in mano, la tiene prima verticale e poi la inclina leggermente*]
Ins.: Quindi inclinando la matita, qual è la sua altezza? Eh
Stud. 1: Eh sarebbe questa no? [*fa un gesto dal basso verso l'alto, verticalmente, che indica il massimo ingombro*]

([1]) Il percorso «Muovere la geometria: esplorando il concetto di altezza e le proprietà dei quadrilateri» è stato ideato e sperimentato all'interno di un progetto di ricerca-azione promosso da IPRASE (Provincia autonoma di Trento). I materiali si possono consultare qui: https://www.iprase.tn.it/matematica-inclusiva-21-muovere-la-geometria.

Ins.: Bella questa cosa qui, allora provo a rappresentarla alla lavagna la domanda perché magari non tutti state osservando il movimento di Alice. Alice prende la matita, questa era la matita iniziale [*disegna alla lavagna una matita verticale*]

Stud. 2: Ma l'altezza non cambia però, cioè

Ins.: Bella questa osservazione! Allora, proviamo ad esplorarla un pochino, Alice domanda «la mia matita ha questa altezza ma se la inclino un po' che altezza ha?»

Stud. 1: Cioè per esempio qui l'altezza è tipo, è credo la stessa perché noi prendiamo il punto e va su

Ins.: Fino a dove va?

Stud. 1: Fino alla punta. Quella [*fa un gesto che indica il segmento verticale disegnato alla lavagna*] è l'altezza della matita messa in questo modo [*inclinata rispetto alla verticale*]. Se noi la misuriamo in obliquo, cioè non credo che bisogna vedere questa

Ins.: Quindi non prenderesti, non seguiresti la penna, dal gesto che stai facendo, ma dove sarebbe l'altezza?

Stud. 1: Farei così [*mette il righello verticalmente al tavolo*]

Stud. 3: Ma se è in diagonale non è che puoi misurarla come se fosse a 90 gradi [...] L'altezza della matita dipende, l'altezza è la stessa di quella di prima però devi misurarla in un altro modo

Stud. 4: Ma allora non si potrebbe dire che l'altezza è la misura che parte dal suolo fino al punto di arrivo?

Ins.: E qual è il punto di arrivo?

Stud. 1: È dove finisce.

Stud. 4: Cioè è la testa dell'oggetto

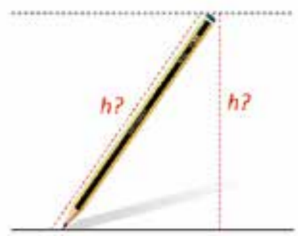
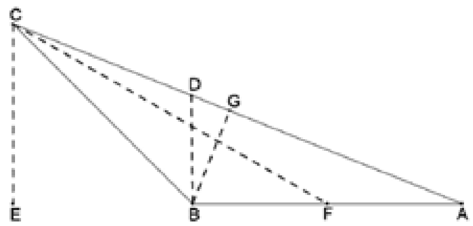


Figura **2** – Configurazione con la matita inclinata di cui dibattono gli studenti

Dalla discussione emerge una duplice concettualizzazione dell'altezza che da un lato è caratteristica intrinseca dell'oggetto, ma dall'altro lato dipende dalla posizione dell'oggetto rispetto ad un piano orizzontale. La conclusione della classe si riferisce all'idea di altezza nella vita quotidiana, intesa come ingombro massimo (si veda per esempio l'intervento dello Stud. 4). In generale, emerge nella classe l'esigenza di trovare un accordo tra concettualizzazioni diverse e di negoziare una definizione di altezza. L'insegnante può quindi rispondere con un percorso che affianca alla caratterizzazione tradizionale, già incontrata durante la scuola primaria, l'idea di striscia in cui è possibile inscrivere il triangolo. Questa seconda caratterizzazione di altezza riprende la proposta di Ferrari (2016, p. 481): «perché un poligono abbia un'altezza deve verificare due condizioni: essere tutto contenuto in una striscia ed avere tutti i suoi vertici distribuiti sui lati della striscia».

Durante il percorso che abbiamo progettato e sperimentato in diverse classi gli studenti hanno lavorato con diverse definizioni di altezza e sono stati coinvolti in attività di descrizione, costruzione e riconoscimento di altezze nei triangoli. A conclusione del percorso l'insegnante ha proposto il quesito che abbiamo lanciato nell'ultima uscita di *Strane Storie Matematiche* e che riportiamo di seguito:

Osserva il disegno:



I quattro segmenti tratteggiati sono tutti altezze del triangolo ABC?
Spiega perché.

Insieme al quesito, avevamo riportato anche alcuni brevi interventi di quattro studenti (Alberto, Luca, Lavinia, Alice) di una delle classi in cui era stato proposto. La lezione, della durata di due ore, è stata così organizzata: è stato assegnato agli studenti il quesito, chiedendo di rispondere e di prepararsi a spiegare il ragionamento in una discussione collettiva; è stato lasciato un po' di tempo per il lavoro individuale; l'insegnante ha coordinato la restituzione di classe durante una discussione matematica. Contestualizziamo di seguito gli interventi degli studenti riportando 3 episodi da cui sono stati estrapolati (per un'analisi più completa dei dati raccolti si veda Lisarelli e Miragliotta (2022)).

EPISODIO 1 – BD È UN'ALTEZZA? (I PARTE)

In tutte le classi sperimentali il dibattito si è concentrato sul segmento BD. Ad esempio, Alberto sostiene: «BD sì [è un'altezza], perché guarda, se guardi il lato eh...il lato BA ehm forma l'angolo retto».

Molti suoi compagni, invece, ribattono che BD non sia un'altezza, portando argomentazioni diverse:

Luca: Forma un angolo retto però non va fino in cima al triangolo

Carla: CE è una altezza relativa a BA e io non sono sicura se GB forma un angolo retto. Se lo forma allora sarebbe l'altezza [...] DB non è una altezza perché non arriva [muove la mano come in Figura 3a] fino all'altra parte della striscia [muove la mano come in Figura 3b], quindi non penso che sia una altezza

Pablo: Eh, no Carla ha ragione su tutto anche perché BD è... diciamo che abbiamo già una altezza per BA se la guardiamo come Alberto, cioè relativa al lato BA. E in tutti i casi usando entrambi i metodi sarebbe comunque andata fuori [dal triangolo], quindi non possiamo veramente guardarla come una altezza relativa a BA [...] non ha i requisiti per essere un'altezza

Il riferimento di Pablo a «due metodi» mostra come la pluralità di rappresentazioni usate durante il percorso si ritrovi nel modo in cui gli studenti parlano di altezze, muovendosi con naturalezza tra le diverse caratterizzazioni. Inoltre, gli interventi di Luca, Carla e Pablo si riferiscono ad alcune caratteristiche che a loro parere *renderebbero* BD un'altezza e mostrano come questi studenti hanno acquisito una certa familiarità con le proprietà dell'altezza tanto da anticipare l'aspetto che avrebbe avuto il segmento BD se fosse stato una altezza («sarebbe comunque andata fuori»).

EPISODIO 2 – QUANTE SONO LE ALTEZZE RISPETTO A UN LATO DEL TRIANGOLO?

La discussione attorno al segmento BD ha consentito di osservare la ricchezza degli argomenti proposti dagli studenti e quanto incorporano diversi modi di riferirsi all'altezza. Le parole di Roberto suggeriscono che stia pensando alla definizione «tradizionale» di altezza, mentre Lavinia descrive il processo di costruzione di tanti segmenti («un sacco di altezze infinite») che rappresentano l'altezza della striscia in cui è inscritto il triangolo. Nello scambio tra i due studenti gioca un ruolo centrale il passaggio per il «vertice opposto» che è una condizione essenziale per una delle due definizioni ma non per l'altra.

Roberto: BD non va al vertice, non arriva al vertice opposto di nessuno dei tre lati, quindi non può essere

Lavinia: Se metti il righello sul segmento AB, ok, ci sei? E poi prendi la squadra. Inizi a disegnare delle altezze e BD è una di quelle tipo. [...] Tu hai presente che puoi fare un sacco di altezze infinite?

Roberto: Ma se non vanno al vertice opposto…

Lavinia: Ma cosa c'entra, non devono andare

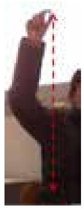
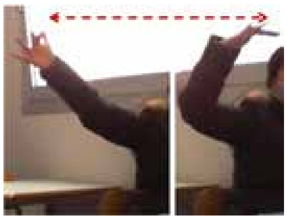
Roberto: Perché deve partire da questo, deve partire dal vertice un'altezza, Lavinia

Lavinia: I segmenti, puoi fare un sacco di segmenti, ok? Non devono andare al vertice opposto

EPISODIO 3 – BD È UN'ALTEZZA? (II PARTE)

Infine riportiamo le parole di una studentessa che per convincere i compagni opera un confronto tra BD e CE. Partendo dall'osservazione che CE è un'altezza rispetto al lato AB, richiama la caratterizzazione di altezza che sfrutta la striscia, in cui i vertici del triangolo e gli estremi dell'altezza si devono trovare sui lati della striscia.

Alice: «Allora se CE è una altezza del lato BA, e praticamente se vuoi farne un'altra che parta dal punto B, praticamente devi fare una retta parallela al punto BA, cioè al segmento BA, parallela a BA deve passare per il punto C. Quindi BD non può essere una altezza, perché deve arrivare almeno fino a… all'intersezione».

(a)  (b) 

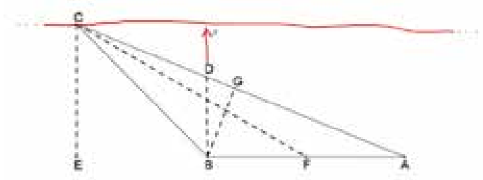
(c) 

Figura **3** – (a) e (b) Gesti con cui Carla accompagna l'argomentazione verbale. (c) Disegno che accompagna la descrizione di Alice

COMMENTO FINALE

Abbiamo ritenuto che le affermazioni di Alberto, Luca, Lavinia e Alice potessero incuriosire il lettore di questa rubrica per motivi diversi. L'esigenza di conciliare una concettualizzazione geometrica e una spaziale può diventare occasione didattica preziosa da cogliere opportunamente da parte dell'insegnante. Gli episodi riportati mostrano come, a conclusione di un percorso che ha intenzionalmente promosso diverse rappresentazioni e descrizioni di altezza, gli studenti non solo rispondono ad un quesito che spesso risulta complesso senza mostrare le difficoltà esplicitate dalla ricerca in Didattica della Matematica, ma le loro argomentazioni sono radicate nel riconoscimento di proprietà geometriche precise (presenza di un angolo retto, estremo in un vertice, attenzione al lato rispetto al quale si sta tracciando l'altezza). Per esempio, gli studenti non hanno mostrato difficoltà a dichiarare che un'altezza «sarebbe comunque andata fuori» dal triangolo, mostrandosi a loro agio con questa possibilità. Inoltre, gli studenti non si sono limitati ad accettare o rifiutare alcuni segmenti come altezze, ma si sono confrontati per più di un'ora mettendo anche in relazione i modi diversi con cui hanno imparato a parlare di altezze; questo è dimostrato anche dalla ricchezza del dibattito che si è acceso attorno ad un solo quesito. Ci è sembrato particolarmente importante condividere con i lettori la discussione attorno al segmento BD poiché dimostra come la richiesta di argomentare la propria risposta abbia mobilitato un modo di pensare che si avvicina a quello del matematico: gli studenti argomentano che BD non può essere una altezza perché *se lo fosse* avrebbe altre proprietà che in quel momento non ha; da lì in avanti lo sforzo della classe va nella direzione di modificare la rappresentazione data per rendere un segmento con estremo in B una altezza relativa al lato BA.

Bisogna sottolineare che tutto questo è stato possibile non solo grazie ad un percorso sulle altezze attentamente progettato, ma in generale è frutto di azioni didattiche scelte dalle insegnanti e comuni a tutte le attività matematiche proposte nelle classi.

«I PALLONCINI DI RUBIERA»

Concludiamo questo numero con il lancio di una nuova strana storia per i nostri lettori. La strana storia viene da un'esperienza recente di Fabio Brunelli, vissuta mentre visitava una classe terza di scuola primaria a Rubiera. Nel paragrafo seguente, l'autore ci racconta della sua esperienza.

La maestra che mi aveva contattato mi ha chiesto di proporre un'attività sui numeri nella sua classe seconda. I bambini mi hanno accolto con entusiasmo e curiosità. Erano già organizzati in «isole» e abituati a lavorare in gruppo. Ho proposto loro questo problema del Rally Matematico Transalpino, che era già stato proposto lo scorso anno agli alunni di classe terza:

PALLONCINI COLORATI (Cat. 3)
«Per la festa della scuola, i bambini della classe di Fabiana stanno attaccando sul muro dell'ingresso una fila di palloncini messi uno a fianco all'altro.
I primi 3 palloncini sono blu, accanto ce ne sono 2 rossi, poi di nuovo 3 blu seguiti da 2 rossi… e così di seguito. I bambini continuano ad attaccare i palloncini fino a terminare lo spazio a disposizione.
Quando hanno finito, notano che gli ultimi 2 palloncini sono rossi.
Per realizzare questa fila di palloncini hanno utilizzato 24 palloncini blu.
Quanti sono in tutto i palloncini che i bambini hanno attaccato al muro dell'ingresso?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta».
Per facilitare la risoluzione, oltre a fornire il testo scritto a ciascuno, a leggerlo e a spiegarlo brevemente, ho disegnato alla lavagna con i gessi colorati la parte iniziale e finale della sequenza di palloncini come mostrato in Figura 4.

Figura **4** – Disegno di Fabio alla lavagna

Gli studenti hanno dato risposte diverse, arrivando a volte al numero corretto, altre volte no, e riflettendo su domande «intermedie» che ho posto come: «I palloncini rossi saranno in numero pari o dispari? Posso saperlo senza contarli esattamente?».

Chiediamo ai lettori di ipotizzare quali potrebbero essere risposte e strategie risolutive di bambini di classe terza o quarta primaria per rispondere a questo quesito.

RINGRAZIAMENTI

Un ringraziamento di cuore alle insegnanti che hanno condotto e documentato questo percorso, e a tutti i loro studenti.

Giulia Lisarelli
giulia.lisarelli@dm.unipi.it

Elisa Miragliotta
elisa.miragliotta@unipv.it

Fabio Brunelli
brunelli1950@gmail.com

Riferimenti bibliografici

Baccaglini-Frank, A., Di Martino, P., Maffei, L., Mariotti, M.A., Pezzia, M., Signorini, G., & Zan, R. (2013). *Le prove INVALSI come risorsa didattica in classe. Prove 2013 per il primo ciclo*. Report – ricerca azione disponibile al seguente link: fox.dm.unipi.it/invalsi.

Ferrari, M. (2016). Sua altezza. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *39*(4A), 465-488.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1999). Pre-service primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher of Education*, *2*(3), 253-275.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry: Two Sides of the Coin. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*, 61-76.

Lisarelli, G., & Miragliotta, E. (2022). Analisi del discorso di classe sul riconoscimento di altezze di un triangolo. *Didattica della Matematica: dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *12*, 45-68.

Sbaragli, S. (2017). Convinzioni di allievi e docenti sul concetto di altezza di poligoni. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *40*(2) A-B, 227-248.