STRANE STORIE MATEMATICHE

«22 : 5 = 4 r 2» Ma siamo proprio sicuri che si scriva così?

di Anna Baccaglini Frank e Pietro Di Martino
con il contributo di Alessandro Ramploud
e Silvia Funghi

Sia l'esperienza in percorsi formativi attivati all'interno del progetto PerContare (https://www.percontare.it/) che studi di ricerca in Didattica della Matematica suggeriscono che uno dei contenuti della matematica, nella scuola primaria, che genera grosse difficoltà è quello della *divisione* (Lisarelli et al., 2021; Funghi & Munarini, 2020; Bass, 2003; Kilpatrick et al., 2001; Ferrero, 1991; Boero et al., 1989). Ci sono diversi elementi che possono considerarsi problematici nell'insegnamento della divisione. In questa strana storia vorremmo occuparci principalmente dell'aspetto della scrittura con un'espressione formale del «risultato» di una divisione con resto diverso da 0, mostrando come criticità legate a questo aspetto in realtà ne tocchino diverse altre.

Gli aspetti che maggiormente risultano coinvolti in questo problema di scrittura formale del «risultato» sono il significato del segno «=» e le modalità usuali con cui, didatticamente, viene utilizzato questo simbolo, forse il più importante e comunque tra i più complessi tra quelli della matematica. Molti studi in Didattica della Matematica (Mason, 2018; Mason et al. 2009; Bagni, 2008; Molina & Ambrose, 2008; Navarra, 2006; Carpenter et al., 2005; Malara & Navarra, 2003; Camici et al., 2002; Kieran, 1981) hanno mostrato come spesso i bambini e le bambine di scuola primaria abbiano interiorizzato un senso strettamente *procedurale* del segno «=», inteso come segno che «restituisce» il risultato di un'operazione aritmetica, un po' come nella calcolatrice. Per esempio, Zan (2007) mostra come alcuni bambini italiani considerino il simbolo di uguaglianza «come un operaio, come un uomo che fa tutte le azioni della matematica perché lui dà il risultato» (p. 81). Questo approccio procedurale porta ad un uso dell'uguale che non riconosce l'essenziale proprietà simmetrica della relazione di uguaglianza, l'uguaglianza è letta ed ha significato esclusivamente da sinistra verso destra: in particolare, 3 + 5 = 8 è un uso riconosciuto del simbolo, ma 8 = 3 + 5 no. Allo stesso modo, 3 + 5 = 4 + 4 è una scrittura che non convince molti bambini, perché «dopo l'uguale ci vuole la risposta e non un'altra domanda».

Appare molto evidente come l'interiorizzazione di questo significato procedurale del simbolo di uguaglianza possa essere fonte di diverse difficoltà anche nello studio successivo della matematica. D'altra parte, come detto, a livello di scuola primaria molto meno frequentemente è consolidato il senso relazionale del segno

«=», che riguarda la relazione di equivalenza esistente tra l'espressione a destra e l'espressione a sinistra del segno stesso (e che quindi è valida leggendo l'uguaglianza sia da destra verso sinistra, che da sinistra verso destra).

In generale, il segno di «=» è coinvolto nella formalizzazione di tutte le operazioni aritmetiche, ma il caso della divisione intera con resto diverso da zero, sempre come inciso, risulta particolarmente delicato e significativo per le sue ricadute dal punto di vista didattico.

Come vedremo, il riferimento a «divisione intera» (in realtà ancor più precisamente intera positiva) gioca un ruolo cruciale nella discussione che seguirà. Infatti, gli insiemi numerici che le Indicazioni Nazionali individuano tra le conoscenze fondamentali da sviluppare nel percorso che si articola dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria di I grado sono: l'insieme dei numeri naturali, l'insieme dei numeri interi e l'insieme dei numeri razionali, che, conformemente con le notazioni tipicamente usate in matematica, indicheremo rispettivamente con le lettere N, Z e Q.

Se ora analizziamo il comportamento delle differenti operazioni all'interno dei differenti insiemi numerici, possiamo notare che si evidenziano delle differenze importanti. Infatti, all'interno dell'insieme N, se prendiamo qualsiasi coppia di numeri naturali, addizione e moltiplicazione restituiscono sempre come risultato un numero naturale; per ciò che concerne sottrazione e divisione, invece, nell'insieme N questo non è sempre vero per tutte le coppie di numeri naturali che si possono considerare. Per esempio, $25 - 33$ non è risolvibile in N. In generale, se prendo il minuendo minore del sottraendo, l'operazione di sottrazione è impossibile in N. In questo caso possiamo risolvere il problema introducendo nuovi elementi, i numeri interi, e costituendo un nuovo insieme numerico Z, che include tutti quei numeri che rendono possibile la sottrazione tra qualsiasi coppia di numeri naturali (e in realtà è fatto in modo che sia possibile la sottrazione tra tutte le coppie di numeri di Z e non solo di N). Questa proprietà si chiama *chiusura di un insieme numerico rispetto ad un'operazione*.

Abbiamo dunque osservato che N non è chiuso per la sottrazione (mentre lo è per addizione e moltiplicazione), mentre Z lo è. E per la divisione cosa possiamo dire?

È facile osservare che non sempre il risultato della divisione tra due numeri naturali (e più in generale due numeri interi) è un numero naturale. Questo accade «poche e selezionate volte», ovvero se e solo se il dividendo è un multiplo del divisore. Ad esempio, il risultato di 144 diviso 24 è un numero naturale, 6, (144 è multiplo di 24, infatti $24 \times 6 = 144$), ma il risultato di 759 diviso 24, non è un numero naturale (nessun multiplo di 24 corrisponde a 759: infatti, 24 per 31 è 744 e 24 per 32 è 768).

Anche in questo caso, possiamo «chiudere» l'operazione allargando l'insieme numerico con nuovi elementi, ed è quello che si fa introducendo Q (anche in questo caso succede che il nuovo insieme sia chiuso per qualsiasi coppia di elementi dell'insieme e non solo per coppie di numeri interi). La divisione, dunque, è chiusa nei razionali, ma non nei naturali o negli interi.

Un elemento a cui prestare particolare attenzione dal punto di vista didattico è la differenza tra la sottrazione in N con minuendo minore del sottraendo e la divisione in cui il dividendo non è multiplo del divisore. Infatti, mentre nel primo caso, didatticamente, si è soliti dire che la sottrazione «non si può fare» in N, nel secondo caso, pur essendo parimenti vero che la divisione esatta non si può fare in N, può aver senso calcolare il numero naturale più grande multiplo del divisore e minore del dividendo e la sua distanza dal dividendo stesso. Introduciamo dunque una nuova operazione, tutta interna ai numeri naturali che, dati due numeri naturali n e m qualsiasi, restituisce sempre due numeri naturali chiamati quoziente e resto. Tale divisione è detta *divisione euclidea* tra numeri naturali, gergalmente anche indicate come «divisioni con resto» (resto che può essere anche uguale a zero).

È essenziale osservare che, in questo senso, il fatto di poter calcolare «per quante volte è possibile moltiplicare il divisore per avvicinarsi il più possibile, senza superarlo mai, al dividendo (quoziente)» e «il resto da aggiungere al prodotto tra divisore e quoziente per arrivare al dividendo», sembra fornirci un possibile «risultato» (il quoziente) delle divisioni che non sarebbero possibili in N, cioè le famose divisioni con resto diverso da zero. Tuttavia, questo tipo di lettura della divisione euclidea sembra offuscare il fatto che gli algoritmi di divisione, in tutti i casi, danno come «risultato» *due* numeri e non uno soltanto, cioè la coppia (*quoziente; resto*). Questa caratteristica della divisione euclidea, in realtà, rispecchia esattamente l'impossibilità di eseguire alcune divisioni all'interno dell'insieme N.

Dal punto di vista della prassi didattica nella scuola primaria, possiamo dire che, abitualmente, si introduce la divisione dopo aver svolto il lavoro della transizione dal pensiero additivo a quello moltiplicativo, nello specifico dopo aver introdotto le cosiddette «tabelline» e (almeno) un algoritmo della moltiplicazione. In questo senso è abbastanza facile che il primissimo approccio delle bambine e dei bambini della scuola primaria alle divisioni avvenga attraverso il «capovolgimento» della tabellina (scrivendo per es. $7 \times 8 = 56$; $56 : 8 = 7$; $56 : 7 = 8$). Questo passaggio mette in luce la complementarità di moltiplicazione e divisione, ma espone le bambine ed i bambini solo a un caso molto particolare di divisione: quelle con resto uguale a 0. In altre parole, come è facile notare, il primo approccio che le bambine e i bambini della scuola primaria hanno all'operazione di divisione è ristretto alle sole divisioni che sono possibili in N, cioè che danno come risultato un numero naturale.

Questo impianto didattico, molto consolidato nella scuola italiana, ha sicuramente la caratteristica di condurre le/gli insegnanti ad introdurre l'operazione della divisione al termine di un lungo percorso (2 anni) che ha visto le bambine ed i bambini cimentarsi prima con l'addizione e la sottrazione e successivamente con la moltiplicazione. In questo lungo itinerario, le bambine ed i bambini sono stati esposti, parallelamente a quanto anticipato precedentemente in riferimento agli insiemi numerici ed alle operazioni, a scritture del tipo $7 \times 8 = 56$ o $7 + 8 = 15$, in cui a sinistra del segno «=» compare l'operazione e a destra il «risultato». Non commentiamo qui il pericolo didattico di un uso eccessivo, a volte addirittura esclusivo, dell' «=» in questo modo, per dare il comando «calcola». In ogni caso queste scritture sono sempre formalmente corrette proprio perché l'addizione e la moltiplicazione sono chiuse in N.

Nel caso della sottrazione, invece, è possibile ricorrere ad una scrittura analoga a quella vista per addizione e moltiplicazione (per es. 15 – 9 = 6) se e soltanto se il minuendo è maggiore del sottraendo, cioè se e soltanto se quella particolare sottrazione è possibile all'interno dell'insieme N. Di fronte a casi in cui il minuendo è minore del sottraendo, come anticipato, si è insegnato alle bambine e ai bambini che «la sottrazione non si può fare», e la scrittura che normalmente si utilizza è quella di lasciare «in bianco» l'espressione a destra del segno «=» (p. es. 72 – 124 = ___).

A questi elementi ci pare sia importante aggiungere che il linguaggio naturale, che si utilizza nella comunicazione quotidiana, attribuisce un senso particolare ad espressioni come 34 + 11 = 45. È facile, infatti, sentire tradurre questa espressione in questo modo: «*trentaquattro più undici fa quarantacinque*». In questo senso, il significato di uguale che si sta veicolando è ancora una volta quello di prompt a innescare lo svolgimento di una procedura di calcolo.

La cosa estremamente interessante, e che vorremmo fare proprio oggetto di questa strana storia, è il fatto che la scrittura delle operazioni del tipo: 72 – 12 = 60 abbinata ad espressioni del linguaggio naturale come «*settantadue meno dodici fa sessanta*» costituisce una spinta fortissima a consolidare nelle bambine e nei bambini una lettura quasi esclusivamente procedurale (*operando – operazione – operando – «uguale» inteso come «fa» – risultato*) del segno «=».

In questo passaggio si condensano una serie di elementi che giocano sicuramente a sfavore dei docenti della scuola primaria. Nella gestione delle formalizzazioni delle operazioni tra numeri naturali, ci si trova a dover controllare significati molto complessi sia del segno «=» sia delle operazioni aritmetiche nella fase più delicata del percorso: la loro prima introduzione. È facile quindi che la pratica didattica di utilizzare formalizzazioni del tipo *operando – operazione – operando – «uguale» inteso come «fa» – risultato* si consolidi talmente che le/gli insegnanti procedano ad un'estensione naturale di questa formalizzazione dalle divisioni possibili in N (gergalmente dette divisioni «con resto uguale a zero») alla divisione euclidea più in generale (e quindi anche alle divisioni comunemente dette «con resto diverso da zero»). Questo processo che pare quasi un procedimento automatico non è però privo di insidie e di possibili fraintendimenti ed errori.

Insistere su scritture tipo 2748 : 7 = ___ è, purtroppo, diffuso anche nell'editoria scolastica. Generalmente, infatti, i libri di testo propongono come formalizzazione della divisione con resto diverso da 0 soluzioni come quelle che sono visibili nelle figure di seguito che abbiamo tratto da libri di testo italiani datati (Figura 1), libri di testo italiani attuali (Figura 2) e libri di testo internazionali (Figura 3).

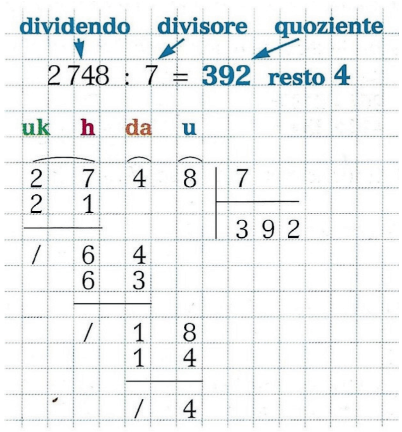

Figura **1** – Divisione con resto diverso da zero
su un libro di testo italiano del 1995

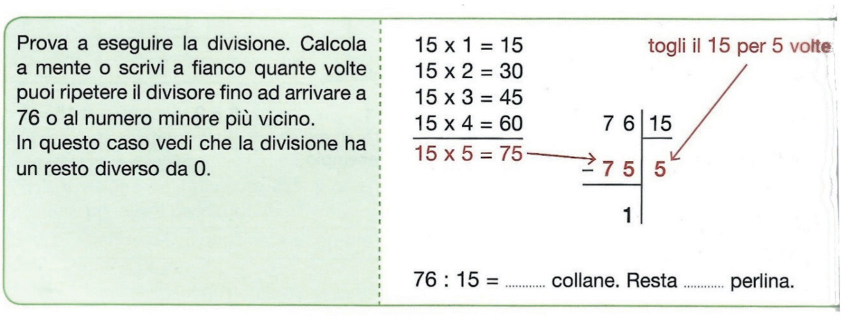

Figura **2** – Divisione con resto diverso da zero
su un libro di testo italiano del 2021

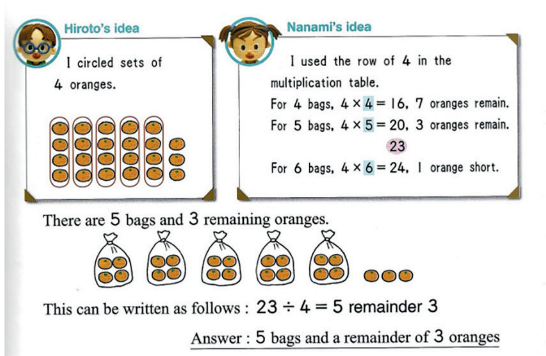

Figura **3** – Divisione con resto diverso da zero
su un libro del 2011, tradotto in inglese da un libro di testo giapponese

Tutte queste scritture (2748 : 7 = 392 resto 4; 76 : 15 = 5 collane. Resta 1 perlina; 23 : 4 = 5 remainder 1) sostanzialmente non fanno altro che riprodurre la forma verbale «*2748 diviso 7 fa 392 e resto 4*» ecc., estendendo la lettura procedurale dell'= dal caso della divisione con resto uguale a zero a quella con resto diverso da zero, semplicemente aggiungendo dopo la classica formalizzazione della divisione la postilla «resto 4», «resta 1», «remainder 1» ecc.

Ci si potrebbe domandare che senso abbia una discussione di questo tipo che apparentemente potrebbe sembrare una «discussione di lana caprina». Il problema è che dietro a queste scritture – e alla resistenza ad accettarne altre, come vedremo – si nascondono in realtà degli elementi molto importanti dal punto di vista matematico.

Innanzitutto, queste tipologie di scrittura raramente vengono discusse con una prospettiva che guardi al senso *relazionale* del segno «=», che, invece, è uno dei più importanti e generativi soprattutto nella prospettiva di un percorso scolastico longitudinale. Il senso relazionale del segno «=» riguarda la consapevolezza che le espressioni a sinistra e a destra dell'«=» devono essere equivalenti. Una metafora usata spesso per descrivere questo significato è quella di una bilancia a due piatti: il segno di «=» rappresenta il punto d'equilibrio della bilancia, indicando che i contenuti sui due piatti (espressioni) «pesano» nello stesso modo (si equivalgono). Per esempio, ripensiamo alla divisione con cui abbiamo aperto questa strana storia, e immaginiamo di avere la nostra bilancia con due piatti e collochiamo, a questo punto, sul piatto sinistro 22 : 5; per scrivere l'uguaglianza dovremmo ragionare su cosa è opportuno mettere sul piatto destro della bilancia. Che cosa va sul secondo piatto? Il quoziente 4? E il «resto 2»?

Questa riflessione genera immediatamente alcune domande che crediamo sia molto importante porre in questa sede.

- Se decidiamo di lasciare da parte il «resto 2», e mettiamo sul piatto destro solo 4, la bilancia non è in equilibrio, perché 22 : 5 non è esattamente pari a 4, altrimenti avremmo che 5×4 è pari a 22 e questo sappiamo che non è vero;

- Se però mettiamo sul piatto destro anche il «resto 2», come gestiamo questo «4 resto 2»? Se lo sommiamo al 4 che avevamo già prima, otteniamo 4 + 2, cioè 6, sul piatto destro, ma, nuovamente, sappiamo che 22 : 5 non è pari a 6, altrimenti avremmo che 5×6 è pari a 22, ancora una volta questo non corrisponde ad un'espressione vera.

A questo punto che fare? È evidente che ci si trova di fronte ad un problema matematico e didattico abbastanza complesso:

1. Come possiamo risolvere il problema matematico della formalizzazione della divisione con resto diverso da zero?

2. Come potremmo affrontare a scuola primaria il problema didattico del passaggio dalla formalizzazione della divisione con resto zero alla formalizzazione della divisione con resto diverso da zero?

Anna Baccaglini-Frank
Università di Pisa
anna.baccaglinifrank@unipi.it

Pietro Di Martino
Università di Pisa
pietro.dimartino@unipi.it

Bibliografia

G.T. Bagni, *Il segno di uguaglianza*, 2008. *Multiverso.* https://multiversoweb.it/riviste/uguale/il-segno-di-uguaglianza/ (consultato lo 03/01/2022).
H. Bass, *Computational Fluency, Algorithms, and Mathematical Proficiency: One Mathematician's Perspective*, «Teaching Children Mathematics», 9(6), 2003, pp. 322-327.
P. Boero – P.L. Ferrari – E. Ferrero, *Division Problems: Meanings and Procedures in the Transition to a Written Algorithm*, «For the Learning of Mathematics», 9(3), 1989, pp. 17-25.
C. Camici – A. Cini – L. Cottino – E. Dal Corso – B. D'Amore – A. Ferrini – M. Francini – A.M. Maraldi – C. Michelini – G. Nobis – A. Ponti – M. Ricci – C. Stella, *Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura?*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 25(3), 2002, pp. 255-270.
T.P. Carpenter – L. Levi – M.L. Franke – J.K. Zeringue, *Algebra in elementary school: Developing relational thinking*, «Zentralblatt für Didaktik der Mathematik», 37(1), 2005, pp. 53-59.
E. Ferrero, *Strategie di calcolo e significati della sottrazione e della divisione tra 7 e 9 anni*, «L'insegnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrate», 1991.
S. Funghi – R. Munarini, *Divisione «per svuotamento»: un'attività didattica dal progetto PerContare adattata alla Didattica a Distanza*, «Archimede», 4, 2000, pp. 206-217.
C. Kieran, *Concepts associated with the equality symbol*, «Educational Studies in Mathematics», 12(3), 1981, pp. 317-326.
J. Kilpatrick – J. Swafford – B. Findell, *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC, National Academy Press, 2001.
G. Lisarelli – A. Baccaglini-Frank – P. Di Martino, *From how to why: A quest for the common mathematical meanings behind two different division algorithms*, «Journal of Mathematical Behavior», 63 (December 2020), 2021, pp. 1-15.
N.A. Malara – G. Navarra, *ArAl Project: Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking*, Pitagora, Bologna, 2003.
J. Mason, *How early is too early for thinking algebraically?* In «Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-year-olds», Springer, Cham, 2018, pp. 329-350.
J. Mason –M. Stephens – A. Watson, *Appreciating mathematical structure for all*, «Mathematics Education Research Journal», 21(2), 2009, pp. 10-32.
M. Molina – R. Ambrose, *From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking*, «Focus on Learning Problems in Mathematics», 30(1), 2008, pp. 61-80.
G. Navarra, *Il Rinnovamento dell'insegnamento dell'area Aritmetico-algebrica nella scuola primaria e secondaria 1°: Il Progetto ArAl*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 29(6), 2006, pp. 701-712.
R. Zan, *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, Springer Italia, Milano, 2007.