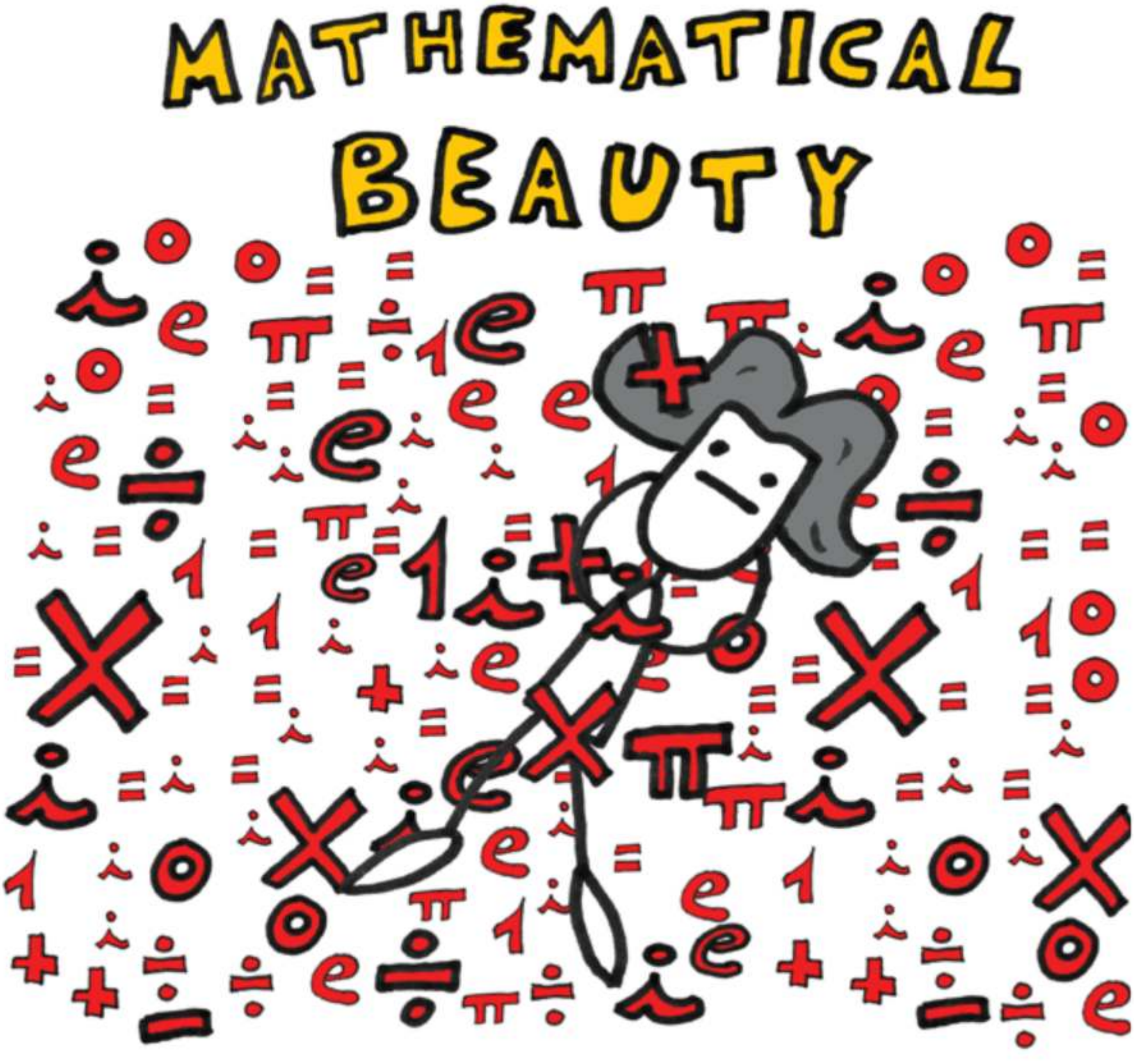
Archimede

RIVISTA PER GLI INSEGNANTI E I CULTORI DI MATEMATICHE PURE E APPLICATE

ANNO LXXV GENNAIO-MARZO 2023 1/2023



Le Monnier

TRA DIFFICOLTÀ INASPETTATE, PRIMI FALLIMENTI E VERGOGNA: LA CRISI MATEMATICA AL PASSAGGIO TRA SECONDARIA E UNIVERSITÀ

di Francesca Gregorio

INTRODUZIONE

Il passaggio da un livello scolastico a quello successivo può essere fonte di difficoltà per gli studenti. Gli insegnanti ne hanno spesso esperienza diretta: a chi non è mai capitato di accogliere un allievo della classe prima che arranca nella nuova scuola, nonostante nell'istituto precedente non avesse mai riscontrato problemi particolari?

La transizione appare particolarmente problematica per quanto riguarda la matematica, disciplina spesso considerata difficile dai nostri studenti. Le ultime ricerche sulla transizione matematica hanno individuato principalmente tre tipi di fattori che possono essere alla base di queste difficoltà (Di Martino et al., 2022a).

Oltre ai fattori *cognitivi*, quelli studiati da più tempo e maggiormente legati ai nodi epistemologici e alla complessità dei contenuti disciplinari, la ricerca didattica ha studiato il ruolo dei fattori *socioculturali* nelle transizioni matematiche tra livelli scolari differenti o tra scuola e università: il cambiamento di contesto porta al cambiamento, spesso sottointeso, di tutta una serie di «regole», «norme» e usi tipici dell'istituzione in entrata che richiedono un adattamento, spesso in tempi lunghi.

Il cambiamento di contesto mette in gioco anche il terzo fattore: i cosiddetti fattori *affettivi.* L'ingresso nella nuova istituzione, infatti, può influenzare gli aspetti emotivi e la visione di sé, cosa che condiziona il comportamento degli studenti. Per esempio, uno studente particolarmente in difficoltà può essere spaventato dalla nuova situazione al punto da non riuscire a mettere in atto delle azioni per uscirne.

I fattori affettivi sono particolarmente rilevanti nel processo di insegnamento e apprendimento della matematica per le conseguenze che hanno nelle scelte e nelle azioni degli allievi (e anche dei docenti). Si pensi alle forti reazioni emotive che spesso suscita il rapporto con la matematica: «io odio la matematica, non ci ho mai capito niente!», «mi viene l'ansia solo a pensare alla matematica», ma anche «mi sono sempre divertita a fare matematica, mi riesce facile» sono frasi ricorrenti in relazione al rapporto degli studenti con la matematica.

Questi tre tipi di fattori sembrano rilevanti per interpretare la difficoltà nella transizione matematica a tutti i livelli: dalla primaria alla secondaria di primo grado, dalla secondaria di primo grado a quella di secondo grado, e anche dalla secondaria all'università.

MAUROLICO E LA «POLVERE POLIEDRICA»

di Luca Dragone

INTRODUZIONE

Nel *Libellus de impletione loci* (1529) ([1]) il matematico messinese Francesco Maurolico (1494-1575) riuscì a risolvere l'antico problema della tassellazione dello spazio mediante poliedri regolari. Infatti, fin dai tempi di Aristotele (IV sec a.C.) ([2]), era opinione comune che lo spazio tridimensionale si potesse tassellare con soli cubi o con soli tetraedri regolari. Per quanto riguarda i cubi la questione è banale, per quanto riguarda i tetraedri invece la questione fu oggetto di dibattito per molti secoli ([3]). Nel Libellus Maurolico dimostrò definitivamente l'impossibilità di tassellare lo spazio con soli tetraedri regolari e propose una tassellazione con tetraedri e ottaedri regolari. Poiché un tetraedro regolare di spigolo l può essere scomposto in un ottaedro e in quattro tetraedri di spigolo $\frac{l}{2}$, e poiché un ottaedro regolare di spigolo l può essere scomposto in sei ottaedri e otto tetraedri di spigolo $\frac{l}{2}$ ([4]), si può concludere che lo spazio tridimensionale si possa tassellare usando una combinazione di tetraedri ed ottaedri regolari. Con il suo contributo Maurolico, non solo fornì una soluzione corretta alla possibilità di tassellare lo spazio con poliedri regolari, ma introdusse anche l'idea originale di frammentazione con invarianza di scala, anticipando di cinquecento anni quello che noi oggi chiamiamo «frattale». In questo articolo viene trattata proprio quest'ultima parte del lavoro del matematico messinese, reinterpretandola in chiave moderna.

SCOMPOSIZIONE DEL TETRAEDRO REGOLARE

Dato un tetraedro regolare di spigolo l, uniamo i punti medi degli spigoli con segmenti di lunghezza $\frac{l}{2}$. Questa costruzione determina la scomposizione del te-

([1]) C. Addabbo: *Il Libellus de impletione loci di Francesco Maurolico e la tassellazione dello spazio*. Tesi di Dottorato, Università di Pisa A.A. 2014-2015.
([2]) Aristotele, *Opere*, *Fisica*, *Del Cielo*, Laterza, 1993.
([3]) *Aristotelis opera cum Averrois commentariis*, vol. V, Venezia 1562-1574, ristampa Minerva Gmbh, 1962.
([4]) L. Dragone, «Archimede», n. 3, 2012, Le Monnier, pp. 123-128.

A CACCIA DI SIGNIFICATI MATEMATICI ATTRAVERSO IL CONFRONTO: SINERGIA DI ALGORITMI PER LA MOLTIPLICAZIONE (*)

di Silvia Funghi e Alessandro Ramploud

INTRODUZIONE

In questo studio ci occupiamo dell'insegnamento-apprendimento degli algoritmi di moltiplicazione nella scuola primaria italiana. In particolare, uno dei traguardi delle Indicazioni Nazionali per l'insegnamento della matematica riguarda il saper eseguire gli algoritmi scritti standard per le operazioni con i numeri naturali. L'algoritmo scritto standard (comunemente detto «in colonna») utilizzato abitualmente nelle scuole primarie italiane per la moltiplicazione si basa sulla notazione posizionale in base dieci. I libri di testo presentano tipicamente l'algoritmo in colonna per la moltiplicazione – e gli altri algoritmi scritti per le operazioni con i numeri naturali – come una sequenza di passaggi da memorizzare. Si presta poca attenzione al motivo per cui quei passaggi devono essere eseguiti in quel modo specifico. Questo tipo di insegnamento, tuttavia, presenta molte problematiche (Hiebert & Grouws, 2007; Jonsson et al., 2014).

L'insegnamento procedurale degli algoritmi è spesso considerato, a tutti i livelli scolastici, più facile della comprensione concettuale e relazionale; questo sembra essere uno dei motivi principali per cui prevale ancora nella pratica scolastica (Thomas, 2020). Molti ricercatori, in quest'ottica, hanno assunto posizioni critiche nei confronti dell'insegnamento degli algoritmi nella scuola primaria. Kamii e Dominick (1997) sottolineano che l'insegnamento degli algoritmi può costituire un pericolo per lo sviluppo da parte dei bambini del ragionamento numerico e del senso del numero, perché sposta «la loro attenzione dal tentativo di dare un senso ai numeri al ricordo delle procedure» (p. 59, nostra traduzione). Sostengono invece che i bambini dovrebbero essere incoraggiati «a creare le relazioni mentali necessarie per costruire il senso del numero» (ivi, p. 60). D'altro canto c'è anche chi sostiene che il problema dipenda dal modo in cui gli algoritmi vengono insegnati in classe, non dall'insegnamento

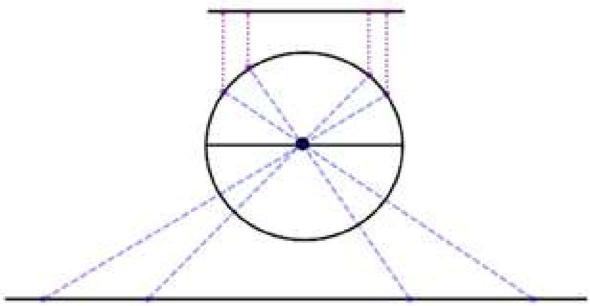
(*) L'articolo trae spunto da una versione più estesa dell'analisi della sinergia di algoritmi come artefatti per la moltiplicazione in Baccaglini-Frank, A., Funghi, S., Maracci, M., & Ramploud, A. (2023), e approfondisce l'analisi dell'esperimento didattico discusso da Ramploud sempre su «Archimede» n. 4/2020.

A COLPO D'OCCHIO

di Roberto Zanasi

Spesso le immagini ci permettono di capire qualcosa di più, o aggiungono nuovi significati alle formule, attivando altre modalità di ragionamento. A volte un disegno ci permette di sperimentare la famosa «esperienza ah-ha!», quella che ci fa esclamare «ecco perché!», o «finalmente ho capito!» (o, magari, «siamo sicuri che ho capito bene?»).

Ecco l'immagine di questo numero.



La cardinalità dell'insieme dei numeri reali è uguale alla cardinalità di un qualunque intervallo aperto finito.

Roberto Zanasi
roberto.zanasi@gmail.com

STRANE STORIE MATEMATICHE

Conclusione di «Una, nessuna e centomila... altezze di un triangolo» e lancio de «I palloncini di Rubiera»

di Giulia Lisarelli, Elisa Miragliotta, Fabio Brunelli

Nell'ultima uscita di *Strane Storie Matematiche* abbiamo lasciato il lettore ponendo l'attenzione sulla nozione di altezza relativa ad un lato del triangolo. Abbiamo presentato e discusso alcune delle ragioni per le quali riconoscere e tracciare correttamente le altezze di un poligono possa essere un compito difficile per gli studenti. Nel caso dei triangoli, le difficoltà sono particolarmente evidenti e trasversali rispetto ai diversi gradi di scolari. Sia l'esperienza nelle classi, sia, più in generale, la ricerca nazionale ed internazionale in Didattica della Matematica (e.g., Gutiérrez & Jaime, 1999; Hershkowitz, 1989; Sbaragli, 2017) mostrano come spesso la nozione di altezza sia strettamente intrecciata a particolari rappresentazioni che gli studenti reputano più comuni, frequenti e, di conseguenza, privilegiate. In particolare, sovente l'altezza per gli studenti: deve partire da un vertice; è interna al triangolo e non coincidente con alcun lato; è necessariamente (o preferibilmente) verticale; è una sola (tranne, per alcuni, nel caso del triangolo equilatero).

I disegni (Figura 1) realizzati da studenti di una classe seconda di scuola secondaria di primo grado mostrano bene alcune di queste caratteristiche.

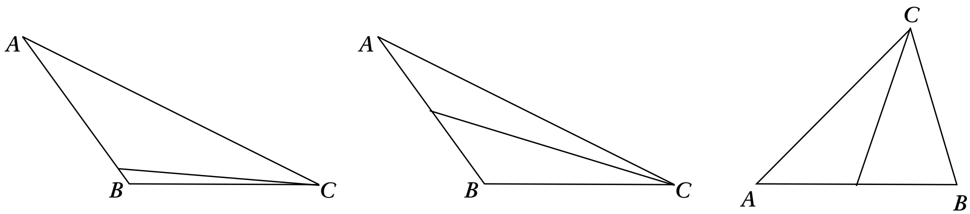


Figura **1** – Alcuni disegni di altezze relative al lato AB realizzati dagli studenti

A partire dalla consapevolezza di come le esperienze spaziali scolastiche ed extrascolastiche possano alimentare e concorrere a costruire l'idea di altezza appena descritta, è possibile progettare un percorso che affronti proprio le criticità messe in luce dalla ricerca, come anticipato nell'uscita precedente. Un aspetto utile da inserire in una tale progettazione è la possibilità di offrire agli studenti più di una caratterizzazione di altezza, accompagnata da molteplici rappresentazioni, cercando di evitare o rimuovere gli stereotipi più comuni. Infatti: «Un suggerimento in questo senso riguarda la proposta di un approccio alla geometria che privilegi l'introduzione dei concetti geometrici come emergenti dalla modellizzazione di

ARCHILUDICA
I problemi di Maurizio Codogno

PROBLEMA 1

Avete un'urna che contiene nove palline, numerate da 1 a 9. Per 2023 volte estraete una pallina, vi segnate il suo numero, e rimettete la pallina dentro l'urna, anche perché altrimenti in breve tempo non potreste più estrarle. Sommate tutti i numeri estratti. È più probabile che la somma sia pari o dispari? (Aiuto: se le palline fossero numerate da 1 a 8 si può sfruttare la simmetria; con la 9 c'è un caso particolare da considerare).

(Peter Winkler, *Mathematical Puzzles*)

PROBLEMA 2

Supponete di avere un insieme di 2023 numeri distinti dove ciascuno di essi è maggiore della somma di tutti gli altri. (Si può fare: prendete per esempio i numeri negativi da –1 a 2023). Dimostrate che almeno tre dei numeri devono essere negativi. (Aiuto: prendete due numeri negativi nell'insieme e la somma di tutti i numeri).

(Peter Winkler, *Mathematical Puzzles*)

RISPOSTA 1

Cominciamo con un caso più semplice. Se ci fossero solo palline numerate da 1 a 8, la probabilità che la somma finale sia pari o dispari è la stessa qualunque sia il numero delle estrazioni fatte. Lo si può vedere per induzione: con una sola estrazione ci sono quattro casi in cui si estrae un numero pari e altri quattro in cui si estrae un numero dispari. A ogni successiva estrazione ci sono quattro casi in cui si estrae un numero della stessa parità della somma fino a quel momento, e quindi la somma complessiva è pari, e quattro altri casi in cui si estrae un numero di parità opposta, e quindi la somma complessiva è dispari. Cosa succede con la pallina numerata 9? Beh, possiamo riordinare i valori estratti in modo che tutti i 9 siano ai primi posti, tanto l'addizione è commutativa. Se restano degli altri valori, per il ragionamento sopra la probabilità che la somma finale sia pari o dispari è la stessa. Se però per 2023 volte è stata estratta la pallina 9, allora la somma è dispari. Pertanto è più probabile che la somma finale sia dispari che pari, anche se la differenza tra le due probabilità è leggermente minore di $4 \cdot 10^{-1931}$…

ARCHILUDICA
La costruzione di un problema
dei Rudi Mat(h)ematici

«La costruzione del mio amore
Mi piace guardarla salire
Come un grattacielo di cento piani
O come un girasole» ([1])

La canzone citata in apertura (e saccheggiata persino nel titolo dell'articolo) è un gran bel brano di Ivano Fossati. Struggente, triste – del resto, quasi tutti i brani di Fossati sono struggenti e tristi, con la possibile eccezione di *La mia banda suona il rock*, che comunque è molto meno allegro di quanto sembri a prima vista – e, soprattutto, apparentemente assai poco matematico, al punto che è del tutto lecito chiedersi che diamine ci faccia in testa ad un articolo chiamato a parlare di matematica.

In realtà, a voler fare i pignoli, un po' di matematica c'è, ma in questo caso c'è solo perché la matematica, com'è noto, è dappertutto: nei quattro versi citati, ad esempio, troviamo il numero «cento», che è pur sempre un numero, anche se qui è usato solo come sinonimo di «tanti». Però sono citati anche i girasoli, e questi ci portano sorprendentemente nel bel mezzo dei numeri di Fibonacci perché, come molti ricorderanno, in questi fiori i semi sono disposti lungo spirali che procedono in senso orario o antiorario: avendo la pazienza di contarle, si scopre che il numero delle spirali orarie e quello delle antiorarie sono due numeri consecutivi della successione di Fibonacci.

Ma anche i girasoli sono citati solo per accidente: la cosa che giustifica la comparazione tra la canzone «la costruzione di un amore» e il titolo di questo articolo, «la costruzione di un problema» sta tutta nel termine condiviso, ovvero la «costruzione». E la comparazione è dovuta proprio al fatto che è insolito pensare all'uno o all'altro – a un amore o a un problema – come qualcosa di costruito. Entrambi sembrano essere eventi che accadono per natura propria: che si sia predisposti al fatalismo o meno, un problema è quasi sempre un guaio, un ostacolo che fa piacere risolvere, ma che si eviterebbe con ancora più soddisfazione, nella vita reale: figuriamoci se qualcuno è così maligno da teorizzarne la costruzione. Ancora più evidentemente (e soprattutto per i cultori dell'amore romantico e gli sceneggiatori di film e fiction) la sola idea che un amore possa essere costruito, anziché irrompere spregiudicato e travolgente nella vita dei protagonisti, è quasi una bestemmia: ogni «costruzione» implica razionalità, e la razionalità è, quasi per hollywoodiana definizione, il principale nemico dell'amore.

([1]) Ivano Fossati, *La costruzione di un amore*, dall'album *Panama e dintorni*, 1981.

LA LEVA DI ARCHIMEDE
Teoria dell'informazione: correzione di errori
Parte II: codici di Reed-Solomon

di Davide Palmigiani

Nell'articolo del numero precedente è stata presentata la struttura base di un codice QR. In questo seguito ci si concentrerà principalmente sul concetto di *correzione errori*, cioè la capacità di un codice, come un QR, di autocorreggersi, nel caso avesse subito danni durante la trasmissione. Prima di parlare di QR, si affronterà un caso più semplice ma esplicativo, per poi analizzare l'idea matematica generale, utilizzando un linguaggio e delle argomentazioni comprensibili anche per uno studente di liceo.

IL CODICE ISBN

Il primo esempio mostrato di *error correction* è stampato sul retro di ogni libro: il codice ISBN è uno standard internazionale per la catalogazione. Anche se oggi si utilizza uno standard leggermente diverso, fino al 2007 si assegnava ad ogni libro un codice di 10 cifre, detto ISBN-10, formato da 10 numeri (da 0 a 9, ad eccezione dell'ultimo, che poteva essere anche una X), come questo:

`ISBN 0571258098`

Le prime nove cifre compongono il messaggio effettivo, che indica in successione il gruppo linguistico, l'editore e il titolo dell'opera. L'ultima cifra non ha significato di per sé, ma è *un carattere di controllo,* in grado di riconoscere e in alcuni casi correggere errori dovuti a problemi di trasmissione del codice.

Notare la potenza dell'affermazione: *con una sola cifra* si è in grado non solo di riconoscere un eventuale errore, ma anche di correggerlo.

DETERMINARE LA CIFRA DI CONTROLLO

L'algoritmo di determinazione della cifra di controllo per il codice ISBN-10 è il seguente:

- si prende il codice iniziale di nove cifre;
- ogni cifra va moltiplicata per un peso in base alla sua posizione: la prima per 10, la seconda per 9 e così via, fino all'ultima, moltiplicata per 2;
- si sommano tutti i numeri ottenuti;

ARCHIMEDIA Matematica e altri linguaggi

Mathematical Beauty

di Davide La Rosa

a cura di Andrea Plazzi

Com'è noto, il grande Eulero è stato uno dei matematici più prolifici, creativi e influenti della storia. Non stupisce quindi che sia stato forse anche il maggior «fornitore di denominazioni matematiche» (espressione azzeccatissima che compare nella sua pagina italiana di Wikipedia). Un po' paradossalmente, una delle formule più famose a lui intestate – l'«identità di Eulero» $e^{i\pi} + 1 = 0$ – non è stata scoperta da lui.

Resta il fascino di un'espressione sorprendente e quasi «misteriosa» nel suo legare numeri, operazioni, nozioni alla base della matematica e che in superficie appaiono indipendenti («Cosa c'entra π con e? La trigonometria con i logaritmi?»). La formula/identità dimostra così una profonda unità soggiacente, capace di destare stupore e meraviglia anche in un personaggio come Richard Feynman.

Sorprendente, misteriosa, profonda, meravigliosa. E «bella». L'identità di Eulero viene spesso citata come «la più bella espressione di tutta la matematica»: una bellezza che affascina e lascia al tempo stesso perplessi gli stessi matematici, che si interrogano sul suo possibile significato (curiosità forse in parte mal riposta; in definitiva, una verità matematica è semplicemente tale), e che forse non è del tutto inaccessibile a chi è lontano dalla disciplina.

Lo dimostra questo fumetto di Davide La Rosa, cultore e cantore del «fumettisticamente scorretto», a partire da una copertina che – con evidente e rivendicata imperizia prospettica – oltre a Eulero omaggia Sam Mendes.

Davide La Rosa (Como, 1980) dopo il diploma di scuola superiore e una breve parentesi presso il corso di laurea in Astronomia, si iscrive a una scuola di fumetto. Da allora collabora – tra gli altri – con Nicola Pesce Editore, Star Comics, Shockdom e Sergio Bonelli Editore. Figura originale e controversa di «fumettista che non sa disegnare», è uno degli autori più amati della scena indipendente. Ha pubblicato numerosi volumi, tra i quali *Zombi gay in Vaticano*, *Suore ninja*, *Paco Lanciano e il fagiano crononauta*, *Ugo Foscolo, indagatore dell'incubo*, *Giuseppe Parini, naufrago delle stelle*, *Dizionario dei film brutti a fumetti* (con Fabrizio Di Nicola), *Il libretto rosso del trio occhialuto antifascista*, *La Divina Commedia illustrata male*. Dal 2017 collabora con Comics&Science (CNR Edizioni) per cui nel 2022 ha scritto *Sotto il segno del toro* (disegni di Silvia Ziche).

Andrea Plazzi
Traduttore, saggista ed editor
andrea.plazzi@gmail.com

in questo numero

RIVISTA TRIMESTRALE

Fondata come
IL BOLLETTINO DI MATEMATICA
nel 1902 da Alberto Conti

1
2023

ISBN 978-88-00-88-156-2

9 788800 881562

Le Monnier

32301

9 770390 554001

ISSN 0390-5543

Poste Italiane S.p.A. - Spedizione in Abbonamento Postale Aut. MBPA/LO-NO/027/A.P./2019 - Periodico ROC – LO/MI

Prezzo del presente fascicolo Euro 7,50