Università del Salento

Facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

# Un'introduzione al gruppo delle trecce anulari

*Relatore:*
Prof. CATINO Francesco
*Correlatrice:*
Dott.ssa MAZZOTTA Marzia

*Laureanda:*
OCCHIONERO Erica

Classificazione MSC2020: 20F36, 20F05

a.a. 2020/21

Avere il coraggio d'intrecciare le proprie passioni
per poter spiccare il Volo!

A mia madre e a mio padre.
A loro che sono l'àncora della mia vita...

# Introduzione

Una *treccia* con $n$ stringhe può essere pensata come un oggetto costituito da due piani paralleli $\pi_0$ e $\pi_1$ nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$, contenenti due insiemi allineati di punti $a_1, \ldots, a_n \in \pi_0$ e $b_1, \ldots, b_n \in \pi_1$ e $n$ archi $l_1, \ldots, l_n$, congiungenti punti $a_i$ e $b_i$ ($i \in \underline{n}$), che intersecano in un solo punto ogni piano $\pi_t$ parallelo tra $\pi_0$ e $\pi_1$.
E. Artin nel 1925 [Art25] ha introdotto una naturale struttura di gruppo nelle trecce. Il *gruppo delle trecce* $\mathbb{B}_n$, che può essere descritto in termini di generatori e relazioni, ha continuato ad essere un oggetto di studio, rivelando numerose connessioni con la fisica teorica, la biologia, la robotica e, non mancano problemi ancora aperti.
In analogia con le trecce classiche possono essere definite le *trecce anulari*. In quest'ultime i punti $a_1, \ldots, a_n \in \pi_0$ e $b_1, \ldots, b_n \in \pi_1$ sono disposti su due circonferenze e gli archi $l_1, \ldots, l_n$ non intersecano la retta congiungente i centri delle due circonferenze.
Anche in questo caso, le trecce anulari hanno una naturale struttura di gruppo che può essere descritta in termini di generatori e relazioni (cfr. [RP02]). Per ogni $n \in \mathbb{N}$, il *gruppo delle trecce anulari* $A\mathbb{B}_n$ può essere presentato da $n+1$ generatori $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau$, e dalle seguenti relazioni:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},$$

per ogni $i \in \underline{n}$,

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i,$$

per ogni $i, j \in \underline{n}$ tali che $|i - j| \notin \{1, n-1\}$, e

$$\tau \sigma_i \tau^{-1} = \sigma_{i+1},$$

per ogni $i \in \underline{n}$. Qui gli indici sono presi modulo $n$ e quindi $\sigma_{n+1} := \sigma_1$.

L'obiettivo di questa tesi è fornire un'introduzione al gruppo delle trecce anulari, vedendo le diverse presentazioni, approfondendo la struttura del gruppo, ed infine dandone un'applicazione alla danza.
Più precisamente, nel primo capitolo introduttivo vengono dati alcuni richiami sui gruppi liberi, sulle presentazioni di gruppi e vengono illustrate le Trasformazioni di Tietze, un procedimento tramite il quale si può passare da una presentazione ad un'altra. In particolare, daremo una presentazione del gruppo simmetrico di grado $n$, dovuta a E.H.Moore (1897).
Nel secondo capitolo, introduciamo ed esaminiamo il gruppo delle trecce dovuto ad Artin, da un punto di vista prettamente algebrico. Inoltre, definiremo il gruppo delle trecce geometriche e mostreremo che tale gruppo è isomorfo a quello di Artin.
Nel terzo capitolo daremo una definizione algebrica del gruppo delle trecce anulari $A\mathbb{B}_n$, per ogni intero positivo $n$, in termini di generatori e relazioni. Dopo aver analizzato alcuni casi particolari, dimostreremo due nuove presentazioni del gruppo contenute in [RP02]. Inoltre, mostriamo come rappresentare le trecce geometriche anulari con i diagrammi.
Nel quarto capitolo, approfondiamo la struttura del gruppo $A\mathbb{B}_n$. Nello specifico, seguendo il Teorema 2.1 di [BB16], illustreremo che $A\mathbb{B}_n$ è isomorfo ad un prodotto semidiretto del gruppo di Artin $\mathbb{B}_n$ e del gruppo libero $F_n$. In particolare, daremo una dimostrazione nel caso $n = 3, 4$.
Infine, l'appendice è dedicata ad un'applicazione del gruppo delle trecce anulari alla danza. In particolare, mostriamo il collegamento esistente tra le relazioni del gruppo e i movimenti eseguiti dai ballerini della danza del palo di maggio, un rituale primaverile che affonda le sue radici antiche nella storia europea, e quelli di una ballerina di danza in volo. La danzatrice utilizza l'amaca, uno strumento in tessuto di seta a forma di "U".