



LA LEVA DI ARCHIMEDE

Cartografia e matematica: la proiezione di Mercatore e brevi spunti didattici

di Davide Passaro, Pierandrea Vergallo

1. INTRODUZIONE

In questo articolo della rubrica *La leva di Archimede* si tratterà il problema della rappresentazione cartografica del planisfero con particolare riferimento al modello di Mercatore. La tematica scelta sta mostrando la sua importanza in un numero crescente di settori (dal militare al civile) a seguito del diffondersi del sistema satellitare GPS, dello sviluppo dei Geographical Information System (GIS) e della facilità di accesso a carte attraverso servizi di web mapping come Google Maps.

Si ritiene, quindi, che una maggiore consapevolezza di questi strumenti e della matematica presente al loro interno sia parte di un utile bagaglio di informazioni, oltre che un utile spunto per motivare in modo diverso la trattazione di alcuni argomenti.

Si presenteranno, infine, alcune proposte didattiche per introdurre questo argomento nella scuola nonché spunti per ricollegarlo con la tematica delle geometrie non euclidee.

2. PROIEZIONI IN MATEMATICA: IL PROBLEMA DELLA MAPPA PERFETTA

Il concetto di proiezione resta uno dei più usati strumenti matematici sia in ambito geometrico sia in ambito analitico. Proiettare per un matematico significa riuscire a visualizzare un determinato oggetto (che sia esso una superficie, una curva o una figura geometrica qualsiasi) da uno specifico punto di vista, escludendone degli altri. In generale, questo permette in geometria di diminuire la dimensione nella quale si opera, semplificando lo studio del problema.

L'esempio più chiaro di proiezione lo danno le luci e le ombre. Ogni ombra è, difatti, la proiezione di un oggetto su di uno specifico piano (nel caso concreto un muro o il pavimento...). Consideriamo, quindi, un'auto con i fari accesi nella notte. Questi generano un fascio di luce che illumina il muro di fronte a essa. Immaginiamo che venga lasciato cadere un pallone e che questo attraversi il cono di luce prodotto dai fari: l'ombra generata dal pallone è proprio la sua proiezione sul muro antistante. Questo ha permesso di portare la forma sferica del pallone su di un piano, divenendo un semplice cerchio.

In termini matematici, sia $f: X \rightarrow X$ una funzione dall'insieme X in se stesso. Diremo che f è una *proiezione* se vale che

$$f^2 = f$$



Intuitivamente, questa proprietà non sembra di evidente riscontro nel nostro esempio. Eppure, se immaginiamo la funzione f come l'azione che la luce dei fari compie sul pallone affinché questo passi da tre dimensioni a due, risulta più chiaro come riapplicare una seconda volta tale processo (f^2), non più sul pallone ma sull'ombra che f ha originato, non comporti nuove modiche. Nel concreto, non ha senso proiettare un oggetto di due dimensioni su di un piano bidimensionale, non stiamo scartando nulla del nostro ente e siamo in grado, ancora, di riconoscerlo in ogni suo dettaglio.

Nella storia la proiezione ha ottenuto un ruolo primario nella cartografia e nella geografia. Ne è presto chiara la motivazione: la geografia studia la Terra e i suoi luoghi, che si sviluppano in un ambiente tridimensionale, mentre le mappe (palesamente più semplici da maneggiare a confronto di un calco in gesso, per esempio) lavorano sulla carta, che è evidentemente di sole due dimensioni. Sin dagli arbori dello studio della cartografia, quindi, lo scopo principale degli studiosi era quello di dare alla luce una mappa più precisa possibile, dove l'aggettivo *preciso* è volutamente poco esplicativo. In effetti, a seconda delle necessità storiche o pratiche dei cartografi si voleva che queste fossero più dettagliate, o più veritiere nella scala di proporzione utilizzata, o che si mantenessero realistici gli angoli generati dalle stesse rette prima sulla cartina e poi sulla Terra. La precisione, con i secoli, ha portato gli studiosi a richiedere che tutte queste proprietà delle cartine geografiche fossero contemporaneamente soddisfatte, alla ricerca di quella che chiameremo la mappa perfetta.

Nonostante svariati tentativi, anche per mano di uomini illustri e celeberrimi matematici, la mappa perfetta sembrava essere una mera utopia. Si riusciva a costruire mappe che fossero accuratissime nel descrivere le angolazioni ma mai mappe che riportassero le distanze dal globo terrestre mantenendo inalterate le proporzioni tra queste. Mai nessuno fu in grado di far convivere le due proprietà. Perché?

2.1 MAPPA PERFETTA E GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Il precedente quesito rimase irrisolto per decenni. Fino a che, grazie al genio di *Carl Friedrich Gauss*, *János Bolyai* e *Nikolaj Ivanovic Lobacevskij*, venne presentato un nuovo modo di vedere la geometria. Fino alla fine dell'Ottocento, infatti, per geometria si intendeva La sola e Unica geometria descritta e studiata da Euclide ne «Gli Elementi», secoli prima della nascita di Cristo. I suoi assiomi e postulati sembra rappresentassero una delle poche certezze nel continuum descritto dalla matematica. Euclide, da sempre, aveva gettato le basi per una geometria (piana e solida) inequivocabile e che, secondo quanto concordato per secoli, era la sola in grado di descrivere meglio il mondo che ci circonda. Non a caso fu lo stesso Euclide a trattare nel proprio manuale il concetto di proiezione di un solido su di un piano o di una figura lungo un singolo segmento.

Tra la fine del 1800 e gli inizi del 1900 si fece, però, strada la possibilità di parlare di geometrie al plurale. Si cominciava a considerare la possibilità che quella di Euclide fosse solo una possibile geometria e che se ne potessero costruire di diverse. Tra queste, la più vicina al nostro intuito è proprio la geometria della sfera. Qui



è necessario introdurre il concetto di curvatura e non tutti i teoremi presentati da Euclide sono validi. Per esempio, il Teorema noto come teorema di Pitagora non si verifica su di una superficie sferica. Ben più grave fu lo sconcerto dei matematici nel verificare che persino uno dei postulati che Euclide aveva enunciato come assolutamente vero non lo era in questo particolare ambiente. Il postulato noto come postulato delle parallele afferma, infatti, che data una retta e un punto esterno ad essa esiste sempre una e una sola retta passante per il punto e parallela alla retta data. Sulla sfera, considerando come rette le circonferenze di raggio massimo giacenti sulla sua superficie, di parallele non se ne possono trovare mai. Questo fu un grosso guaio: la geometria della sfera non poteva essere trattata come interscambiabile con la geometria sul piano di Euclide.

Nel nostro caso il problema è chiaro: la Terra, il cui nostro scopo era proiettare su di un foglio, è pressoché una sfera, un geoide, e su di essa valgono le regole della geometria sferica. Si giustificò, da qui, l'impossibilità di costruire la fatidica mappa perfetta: la Terra e il foglio sono geometricamente incompatibili.

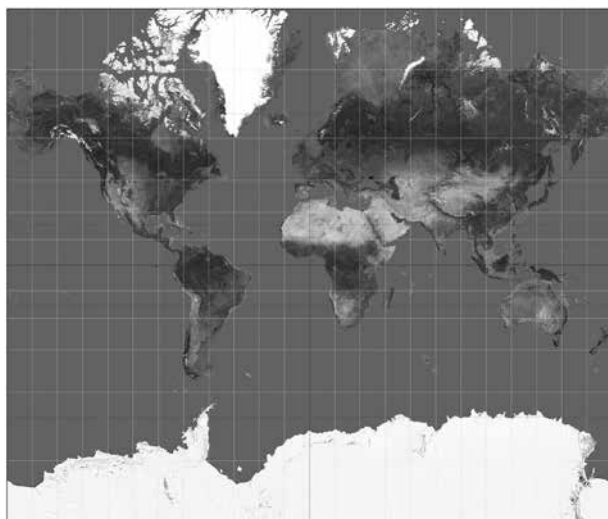


Figura 1 - Una rappresentazione della Terra tramite proiezione di Mercatore

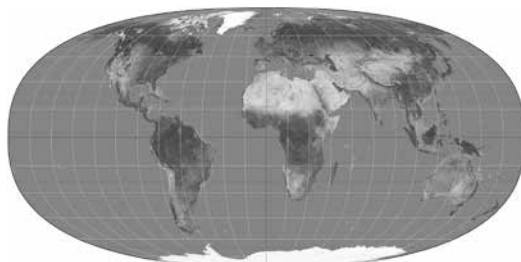


Figura 2 - Un ulteriore esempio di proiezione della Terra: la proiezione iperellittica di Tobler



3. PROIEZIONE CILINDRICA DI MERCATORE

La proiezione di Mercatore è una delle proiezioni più utilizzate nella moderna cartografia. In particolare, quasi tutti gli atlanti e le carte in uso nel sistema scolastico italiano sono di questa tipologia. Tale scelta è dettata soprattutto da una tradizione storica che la rendeva utile in particolare per le carte nautiche. Queste ultime devono poter mantenere costanti gli angoli all'interno della mappa se traslati. Ciò significa che dobbiamo poter misurare gli stessi gradi sia che l'angolo si trovi nei pressi dell'equatore sia che questo sia posizionato vicino ai poli. Resta, inoltre, indispensabile che gli angoli misurati su carta siano di egual ampiezza a quelli misurati sulla Terra. La proprietà di conservare gli angoli è nota come *conformità della mappa*. Questa permette di considerare come rette le traiettorie costanti (senza curve) delle navi in mare.

Il concetto di *conformità* è preso in prestito dalla matematica e, nello specifico, dall'analisi complessa ove per conforme si intende una funzione F per cui prese due qualsiasi curve γ_1, γ_2 sul piano complesso (o più semplicemente su $[xy]$) e considerato l'angolo che le rispettive tangenti t_1, t_2 formano nel punto P di intersezione tra le due, questo non deve variare in misura se calcolato su $F(\gamma_1), F(\gamma_2)$.

3.1 COME LAVORA LA PROIEZIONE DI MERCATORE?

L'idea di Mercatore era quella di proiettare la Terra sul foglio come se vi fosse una lampadina al centro del geoide e quest'ultimo fosse trasparente. Facendo così ruotare lentamente la Terra e lasciando traccia delle ombre della lampadina (sorte per l'eterogeneità della superficie terrestre, o per i confini ideali su di essa) su di un rullo che fa scorrere un foglio tanto lentamente quanto la Terra.

Due considerazioni a riguardo:

1. Si noti che la proiezione di Mercatore lavora, come ipotizzato, su cilindri e permette il passaggio dalla sfera al piano tramite lo stesso;
2. I due poli $N; S$ (nord e sud) non sono rappresentati sul cilindro perché questo è parallelo all'asse della Terra, pertanto tali punti sono proiettati all'infinito.

La prima formulazione matematica della proiezione secondo Mercatore è stata effettuata da *Thomas Harriot* (1560-1621) e *Henry Bond* (1600-1678) diversi anni dopo la sua prima costruzione per mano dell'olandese *Gerhard Kremer* (1512-1594) comunemente noto come *Gerardo Mercatore*.

Va sottolineato che l'obiettivo del matematico e cartografo era proprio quello di ottenere la tanto agognata conformità di un planisfero per tracciare rotte navali più accurate. Quest'ultima richiesta risulta, tuttora, in contrasto con la volontà di mantenere inalterate le aree e di poter, quindi, riportare in grandezza gli stati del mondo o i suoi territori. Questa risulta una delle più profonde perdite nel modello di Mercatore.



3.2 CONSIDERAZIONI MATEMATICHE

Consideriamo le coordinate comunemente in uso sulla Terra (intesa come sfera): la longitudine (che indicheremo con λ) e la latitudine (che denoteremo con ϕ).

La proiezione di Mercatore lavora su di esse come segue:

$$F: S^2 \rightarrow C,$$

$$(\lambda, \phi) \mapsto \left(\lambda - \lambda_0, \log \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right) \right)$$

dove con S^2 abbiamo denotato la sfera bidimensionale⁽¹⁾ e con C il cilindro su cui la mappa va proiettata.

Rimandiamo alla bibliografia ([3], [5], [4], [6]) per il dettaglio dei passaggi matematici.

Nei prossimi paragrafi, ci limiteremo a esaminare alcune osservazioni ricavabili dalla relazione precedente che evidenziano le problematiche di questo tipo di proiezione.

3.2.1 Un'osservazione sui poli: un esercizio con i limiti

In questo paragrafo andiamo a studiare la funzione relativa alla seconda coordinata:

$$f(\phi) = \log \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right)$$

In primo luogo, analizziamo l'insieme di definizione X_f della funzione f . Osserviamo che questa è composta da una funzione logaritmo e una funzione tangente. Nel primo caso è noto che l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, mentre per il secondo basta che l'argomento sia differente da $\pm \frac{\pi}{2}$. Pertanto:

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) > 0$$

e

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

Ricordiamo che per definire le coordinate sulla sfera si ha che la longitudine λ varia nell'intervallo $[0, 2\pi]$ mentre la latitudine ϕ varia nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ne

⁽¹⁾ Nel nostro caso la sfera S^2 è proprio il geoide Terra..

concludiamo che lo studio del dominio di f non prevede la consueta periodicità delle funzioni goniometriche elementari.

Ritornando alle condizioni di esistenza, si ricava che

$$0 \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

cioè

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

Ma essendo gli estremi esclusi per la condizione relativa alla funzione tangente in f si ha l'insieme di definizione $X_f \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ con $X_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Cosa succede agli estremi? Utilizziamo il concetto di limite per verificare l'andamento di f in $\frac{\pi}{2}$ e in $-\frac{\pi}{2}$.

Per $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ da sinistra si ha

$$\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right) = +\infty.$$

Questo risultato, ottenuto tramite l'analisi infinitesimale, risulta in pieno accordo con quanto osservato in precedenza.

Allo stesso modo si verifica che per valori di ϕ tendenti a $-\frac{\pi}{2}$ da destra la funzione $f(\phi)$ è divergente. In effetti:

$$\lim_{\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \log(y) = +\infty$$

dove con y abbiamo sostituito il valore del limite:

$$\lim_{\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = 0^+.$$

Anche in questo secondo caso si è potuto provare che per ϕ che tende a $-\frac{\pi}{2}$ la funzione $f(\phi)$ è divergente.

Abbiamo, pertanto, provato che i punti della Terra corrispondenti con i poli non sono rappresentabili nella mappa di Mercatore. Essi, infatti, sono proiettati all'infinito e, come ovvio, non si dispone di tanta carta per poterli disegnare.



3.2.2 Un esempio di dilatazione delle distanze

Proviamo, ora, a verificare che la proiezione modificata di Mercatore tende a dilatare le figure in prossimità dei poli (pur mantenendone gli angoli, e quindi la forma). A rigore, la dilatazione è tanto più accentuata quanto ci si allontana dall'equatore.

Si considerino tre punti A, B, C sulla sfera terrestre. Utilizzando le coordinate tipiche della latitudine (ϕ) e della longitudine (λ) li sceglieremo nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A(0, \lambda_1) \\ B\left(\frac{\pi}{6}, \lambda_1\right) \\ C\left(\frac{\pi}{3}, \lambda_1\right) \end{aligned}$$

In particolare, si sono scelti tutti giacenti sul medesimo meridiano di longitudine λ_1 . Risulta evidente che la distanza in latitudine tra le coppie di punti A, B e B, C è la medesima, pari alla differenza delle prime coordinate in ϕ della coppia di punti scelta. In entrambi i casi questa vale $\frac{\pi}{6}$.

Verifichiamo cosa accade proiettandoli tramite il metodo di Mercatore, applicando quindi ai tre punti l'espressione analitica della funzione a noi già nota:

$$F: \begin{cases} \phi \mapsto \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right) \\ \lambda \mapsto \lambda - \lambda_0 \end{cases}$$

Vale che:

$$\begin{aligned} F(A) &= \left(\log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right), \lambda_1 - \lambda_0\right) = (\log(1), \lambda_1 - \lambda_0) = (0, \lambda_1 - \lambda_0) \\ F(B) &= \left(\log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right)\right), \lambda_1 - \lambda_0\right) = \left(\log\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \lambda_1 - \lambda_0\right) = (\log(\sqrt{3}), \lambda_1 - \lambda_0) \\ F(C) &= \left(\log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right), \lambda_1 - \lambda_0\right) = \left(\log\left(\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right), \lambda_1 - \lambda_0\right) \end{aligned}$$

Osserviamo che tutti i punti hanno subito una *traslazione* nella seconda coordinata dello stesso valore $-\lambda_0$. Ne segue che i punti $F(A), F(B), F(C)$ sono ancora giacenti su di uno stesso meridiano, questa volta di coordinata $\lambda_1 - \lambda_0$.

Nel caso della prima coordinata, notiamo che i punti $F(B)$ e $F(C)$ sono stati portati su latitudini differenti da quelle di partenza. Al contrario, solo A ha mantenuto invariata la sua latitudine dopo l'applicazione della funzione F . Questo ci permette di concludere che i soli punti fissi della funzione

$$\phi \mapsto \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right)$$

sono i punti aventi $\phi = 0$, cioè giacenti sull'equatore. Questo è coerente con quanto ci aspettavamo: la dilatazione dei punti avviene all'allontanarsi dall'equatore.

Analizziamo, adesso, le coordinate in ϕ per valutare la distanza in latitudine tra le coppie $F(A), F(B)$ e $F(B), F(C)$.

Nel primo caso la differenza $\phi_{F(B)} - \phi_{F(A)}$ risulta

$$\log(\sqrt{3}) - 0 = \log(\sqrt{3}) \cong \log(1,73)$$

mentre, nella seconda coppia, $\phi_{F(C)} - \phi_{F(B)}$ risulta

$$\log\left(\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) - \log(\sqrt{3}) \cong \log(3,72) - \log(1,73)$$

Sfruttando, infine, la proprietà ben nota dei logaritmi: $\log(a) - \log(b) = \log(a/b)$ si ottiene che

$$\phi_{F(D)} - \phi_{F(C)} \cong \log\left(\frac{3,72}{1,73}\right) \cong \log(2,15)$$

Ne segue che, essendo il logaritmo (in base e) una funzione crescente:

$$\log(1,73) < \log(2,15)$$

Pertanto si è ottenuta la dilatazione prevista all'avvicinarsi ai poli. In particolare, i due punti $F(B), F(C)$ risultano più distanti tra loro rispetto ai punti $F(A), F(B)$, seppur A, B e B, C avessero medesima distanza (si veda la figura 1)

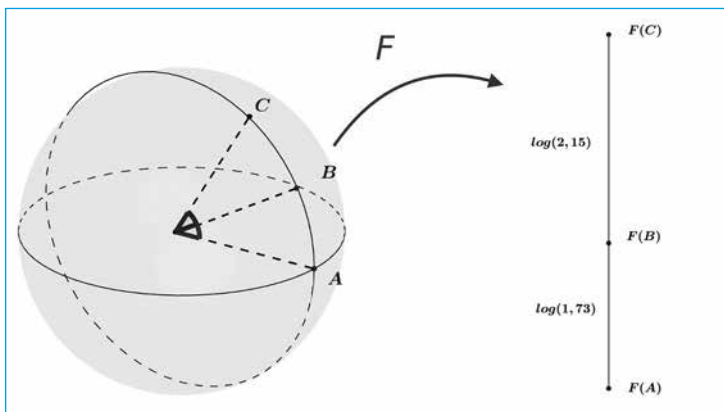


Figura 3 - Rappresentazione dei punti A, B, C sul geoide e loro proiezione dilatata



4. ESEMPI DI MAPPE DIFFERENTI

Abbiamo già fatto cenno al fatto che nella rappresentazione cartografica in analisi vi sono delle discordanze, coerentemente a quanto dimostrato in generale, tra ciò che vediamo sul foglio e ciò che è nella realtà. In particolare, abbiamo potuto anticipare che in questo modello non è possibile mantenere inalterati i rapporti tra le aree in ogni punto della Terra. Ciò significa che se comparate sulla mappa o nella realtà due aree che possono sembrare equivalenti sulla prima, risultano effettivamente differenti sulla seconda.

A tal proposito *James Talmage* e *Damon Maneice* hanno dato vita a un'applicazione, *The True Size*, che permette a chiunque di giocare con le interessanti differenze appena citate. Spesso risulta davvero inaspettato osservare che alcuni territori che apparentemente sembrano enormi non sono nient'altro che piccoli state-relli ingrossati dalla costruzione di Mercatore. Di seguito, si propongono alcune immagini estratte dal sito e già utilizzate da *thetruesize.com/*.

Si nota, quindi, che tanto più ci si allontana dall'Equatore terrestre (e con esso dall'asse orizzontale della carta) tanto più le aree vengono dilatate mantenendo costanti gli angoli e realizzando figure simili a quelle di partenza. Intuitivamente, tale fenomeno è giustificato dalla costruzione scelta da Mercatore: i raggi della lampadina formano angoli con il cilindro via via minori, operando una dilatazione. Matematicamente, invece, abbiamo già notato che figure molto vicine ai poli (con latitudine prossima a $\frac{\pi}{2}$) tendono a esplodere, cioè a diventare via via maggiori fino alla proiezione all'infinito dei poli nord e sud.

5. CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Dal punto di vista didattico affrontare il tema della creazione di mappe può portare a realizzare diversi percorsi in base alle competenze del docente e alle potenzialità del gruppo classe.

In questo contesto si assume che siano già presenti conoscenze relative alla trigonometria e a sistemi di coordinate sferiche e cilindriche.

Tra i possibili spunti suggeriamo i seguenti:



Figura 4 - Un esempio di confronto fra le dimensioni degli stati: la Groenlandia e l'Italia (fonte *thetruesize.com*)

Figura 5 - Un esempio di confronto fra le dimensioni degli stati: la Groenlandia, l'Australia e l'India (fonte thetruesize.com)



- riflessioni interdisciplinari di tipo storico che affrontino il tema dello sviluppo della navigazione e la corrispondente necessità di creare mappe per la navigazione (si veda [1]) ed eventuali approfondimenti sulle geometrie non euclidee (si veda [2]);
- un percorso che, avvalendosi anche di una didattica laboratoriale, utilizzi programmi gratuiti e librerie scaricabili dalla rete per visualizzare la variazione della mappa generata al variare del tipo di proiezione, localizzare una foto georeferenziata, imparare a passare dal sistema di coordinate che utilizza la latitudine e la longitudine a quello denominato Universal Transverse Mercator (UTM).

Nella pagina web dedicata alla rubrica di Archimede (al seguente link: <http://maddmaths.simai.eu/category/archimede/archimede-applica/>) sono presentati sia questi programmi gratuiti sia queste librerie e sono inseriti link a siti che offrono materiale utile a trattare questa tematica.

Davide Passaro

Insegnante e coordinatore del blog www.mathsintheair.org
passaro.fk@gmail.com

Pierandrea Vergallo

Dottore in matematica e collaboratore del blog www.mathsintheair.org
pierandrea.vergallo@libero.it

Riferimenti bibliografici

- [1] L. RUSSO, *Stelle atomi e velieri*, Mondadori, 2016.
- [2] D. PALLADINO – C. PALLADINO, *Le geometrie non euclidee*, Carocci 2008.
- [3] E.W. GRAFAREND – R. SYFFUS, *The optimal Mercator projection and the optimal polycylindric projection of conformal type- case-study Indonesia*, Springer, Maggio 1998, Volume 72, Issue 5, pp. 251-258.
- [4] <http://www.math.ubc.ca/israel/m103/mercator/mercator.html>.
- [5] M. MONMONIER – R. LINES – MAP WARS, *A Social History of the Mercator Projection*, University Chicago Press, 2004.
- [6] D. DANERS, *The Mercator and Stereographic Projections, and Many in Between*, «The American Mathematical Monthly», Vol. 119, No. 3 (March 2012), pp. 199-210.
- [7] G. DE CECCO – E. MANGINO, *La sfera in geometria e geografia*, Quaderno n. 1 anno 2001, Dipartimento di Matematica E. De Giorgi, Università degli studi di Lecce, 2001.