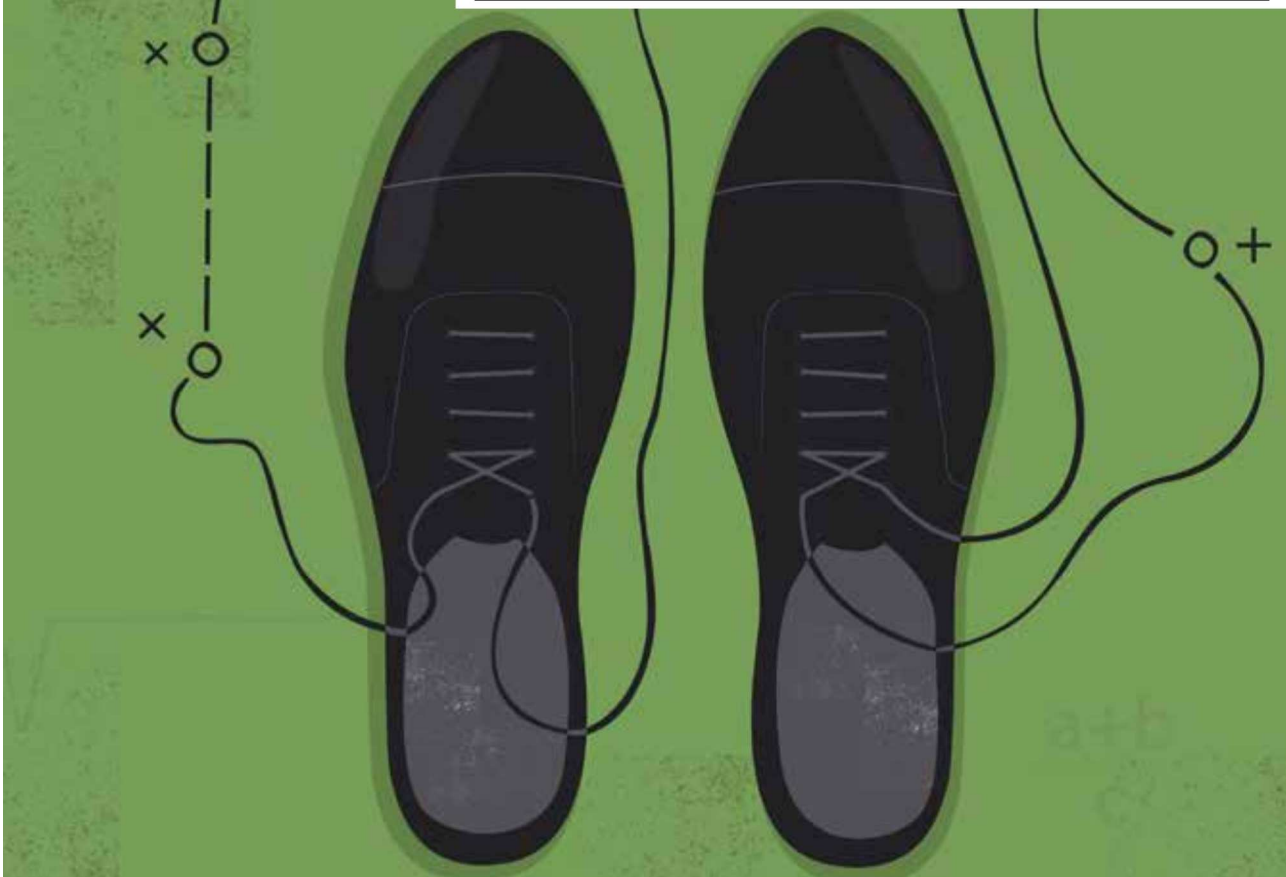


Anna Baccaglioni Frank  
Pietro Di Martino  
Roberto Natalini  
Giuseppe Rosolini

# DIDATTICA DELLA MATEMATICA

 **MONDADORI**  
**UNIVERSITÀ**



# Didattica della matematica



Anna Baccaglini-Frank  
Pietro Di Martino  
Roberto Natalini  
Giuseppe Rosolini

# Didattica della matematica

© 2018 Mondadori Education S.p.A., Milano  
Tutti i diritti riservati

ISBN 978-88-6184-550-3

Il Sistema Qualità di Mondadori Education S.p.A. è certificato da Bureau Veritas Italia S.p.A. secondo la Norma UNI EN ISO 9001:2008 per le attività di: progettazione, realizzazione di testi scolastici e universitari, strumenti didattici multimediali e dizionari.

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i Paesi. Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Le fotocopie effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da CLEARedi, Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali, Corso di Porta Romana 108, 20122 Milano, e-mail [autorizzazioni@clearedi.org](mailto:autorizzazioni@clearedi.org) e sito web [www.clearedi.org](http://www.clearedi.org).

*Realizzazione editoriale*

*Coordinamento redazionale* Alessandro Mongatti

*Redazione* Oldoni Grafica Editoriale s.r.l.

*Impaginazione* Oldoni Grafica Editoriale s.r.l.

*Progetto grafico* Cinzia Barchielli, Marco Catarzi

*Progetto copertina* Alfredo La Posta

Prima edizione Mondadori Università, gennaio 2018  
[www.mondadorieducation.it](http://www.mondadorieducation.it)

Edizioni

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1  
2022 2021 2020 2019 2018

La realizzazione di un libro comporta per l'Autore e la redazione un attento lavoro di revisione e controllo sulle informazioni contenute nel testo, sull'iconografia e sul rapporto che intercorre tra testo e immagine. Nonostante il costante perfezionamento delle procedure di controllo, sappiamo che è quasi impossibile pubblicare un libro del tutto privo di errori o refusi. Per questa ragione ringraziamo fin d'ora i lettori che li vorranno indicare alla Casa Editrice.

Mondadori Università

Mondadori Education

Viale Raffaello Labruschini, 33 – 50134 Firenze

Tel. 055.50.83.223

[www.mondadorieducation.it](http://www.mondadorieducation.it)

Nell'eventualità che passi antologici, citazioni o illustrazioni di competenza altrui siano riprodotti in questo volume, l'editore è a disposizione degli aventi diritto che non si sono potuti reperire. L'editore porrà inoltre rimedio, in caso di cortese segnalazione, a eventuali non voluti errori e/o omissioni nei riferimenti relativi.

Lineagrafica s.r.l. – Città di Castello (PG)

Stampato in Italia – Printed in Italy – gennaio 2018

In copertina: Shoelaces from smart shoes connected to arrows and diagram over equations © Ikon Images / Gettyimages

# Indice

<i>Introduzione</i>	VII
<b>Capitolo 1. Fare matematica oggi</b>	1
1.1 Che cosa è la matematica?	1
1.2 Espansione dell'influenza della matematica	3
1.3 La matematica e la realtà	5
1.4 La matematica intorno a noi	9
1.5 I nuovi mestieri del matematico	10
1.6 Ma alla fine, perché è importante studiare la matematica?	11
<b>Capitolo 2. Il linguaggio in matematica</b>	13
2.1 I concetti e i ragionamenti matematici	14
2.2 Dimostrazioni	18
2.3 Il potere di una dimostrazione	20
2.4 Linguaggio matematico e linguaggio quotidiano, studi didattici	24
<b>Capitolo 3. Teorie dell'apprendimento-insegnamento della matematica</b>	28
3.1 Che cosa è la didattica della matematica?	28
3.2 Il comportamentismo (behaviorism)	32
3.3 Teorie cognitivo-costruttiviste	35
3.4 Alcuni costrutti teorici utili come «lenti» attraverso cui studiare processi di apprendimento	48
3.5 Teorie socio-costruttiviste	59
<b>Capitolo 4. Errori e difficoltà in matematica</b>	65
4.1 La pericolosa identificazione errore-difficoltà in matematica	65
4.2 Le teorie del successo e le attribuzioni di fallimento in matematica	68
4.3 L'evoluzione dell'approccio all'errore in mathematics education	71
4.4 La conoscenza interpretativa ( <i>interpretative knowledge</i> )	75
<b>Capitolo 5. BES e DSA: gestione dei profili di apprendimento in matematica</b>	80
5.1 BES e DSA: documenti ministeriali italiani e manuali diagnostici	80
5.2 Studi nazionali e internazionali sulla «discalculia»	84
5.3 Dalla ricerca alla pratica: difficoltà o disturbo?	88
5.4 Dalla ricerca alla pratica: l'uso di artefatti fisici e digitali	89
<b>Capitolo 6. La competenza matematica</b>	92
6.1 Introduzione	92
6.2 Il justification problem	93
6.3 Il KOM Project, la definizione di competenza matematica e il quadro teorico di PISA	97

6.4 Il contributo italiano alla riflessione sulle competenze: dalla matematica per il cittadino al Progetto M@t.abel	101
<b>Capitolo 7. Il problem solving</b>	105
7.1 Gli studi sul problem solving della Gestalt	105
7.2 Il problem solving come obiettivo educativo	110
7.3 Gli studi sul problem solving in contesto matematico	113
<b>Capitolo 8. Argomentare e dimostrare in matematica</b>	119
8.1 Il ruolo di argomentazione e dimostrazione nell'insegnamento della matematica	120
8.2 Le funzioni della dimostrazione e il senso della richiesta di dimostrare qualcosa	127
8.3 Insegnare la dimostrazione a scuola	133
<b>Capitolo 9. Le indicazioni normative relative all'insegnamento della matematica alla scuola secondaria</b>	144
9.1 Introduzione	144
9.2 Il quadro normativo generale per la scuola secondaria di primo grado	146
9.3 Il quadro normativo relativo all'insegnamento della matematica per la scuola secondaria di primo grado	149
9.4 Il quadro normativo generale per la scuola secondaria di secondo grado	155
9.5 Il quadro normativo relativo all'insegnamento della matematica per la scuola secondaria di secondo grado	160
<b>Capitolo 10. Ambienti digitali per l'apprendimento della matematica: il caso dei software di geometria dinamica</b>	166
10.1 Ambienti digitali per l'apprendimento e la nozione di «micromondo»	166
10.2 Introduzione (pratica) a un AGD	170
10.3 Conclusioni	183
<b>Appendice. Elementi di comunicazione della matematica</b>	185
A.1 La società della scienza	185
A.2 Specificità e difficoltà della comunicazione della matematica	186
A.3 Comunicare la matematica a scuola	188
<b>Appendice. Didattica della matematica e crediti di metodologie e tecnologie didattiche secondo la nuova normativa</b>	191
<i>Bibliografia</i>	195
<i>Bibliografia approfondita e commentata</i>	213
<i>Indice analitico</i>	223

---

## Introduzione

Insegnare è un mestiere fondamentale e complesso, nonostante spesso l'insegnamento non venga valorizzato come meriterebbe. Anche sui media, quando si parla della scuola, spesso si esplicitano punti di vista che non sembrano considerarne la complessità. Per esempio, alcuni giornalisti, commentando i percorsi per la formazione in ingresso degli insegnanti che si sono succeduti negli anni, sostengono che per essere un buon insegnante sia necessario (e sottointeso sufficiente) conoscere bene la propria disciplina e avere tanta esperienza.

Insomma, ritengono che se una persona conosce bene ciò che deve insegnare, ha tutte le conoscenze per imparare a insegnare e che poi serva solamente l'esperienza nella pratica quotidiana.

Questo punto di vista è, a essere generosi, quantomeno superficiale e probabilmente condizionato da una visione dell'insegnamento che si riferisce a un contesto molto particolare, quello universitario. Non vogliamo qui entrare nel merito se nel contesto universitario l'assunto di cui sopra possa ritenersi vero, quel che è certo è che l'insegnamento universitario e quello scolastico sono due mestieri ben diversi, con obiettivi in gran parte differenti. Mentre l'insegnante universitario può pretendere una notevole autonomia da parte dei suoi studenti, l'insegnante di scuola superiore non può prescindere dall'interazione con loro, e deve farsi in parte carico delle loro motivazioni, delle difficoltà, del loro impegno. Per questo un insegnante di scuola dovrebbe essere preparato da una parte sugli aspetti legati alle relazioni con gli altri, e dall'altra sulle difficoltà epistemologiche, concettuali e didattiche della specifica disciplina di insegnamento. Dovrebbe insomma maturare conoscenze sia in ambito pedagogico generale, sia in ambito didattico disciplinare. Le conoscenze didattiche disciplinari costituiscono una parte cruciale del percorso unitario di formazione iniziale e immissione in ruolo previsto dalla nuova normativa (legge 107/15 e decreto legislativo attuativo 59/17). Noi siamo convinti che un'introduzione alla didattica disciplinare debba essere fatta a monte (all'interno della laurea magistrale o dei 24 CFU per lo sviluppo delle competenze di base nelle discipline antropo-psico-pedagogiche e nelle metodologie e tecnologie didattiche previsti dalla nuova normativa): sia perché può avere una funzione di orientamento, sia perché crediamo che la selezione dei futuri docenti non debba essere fatta solo sulle conoscenze della disciplina o su quelle pedagogiche generali.

È proprio riflettendo su quest'ultimo punto (le conoscenze in didattica disciplinare) che nasce questo testo. Se è vero infatti che di manuali di didattica generale ce ne sono moltissimi in commercio, molto più scarsa è la produzione di manuali di didattica disciplinare. Questo è vero anche in un campo, come quello della didattica della matematica, che ha una radicata tradizione di ricerca universitaria in Italia (con uno spe-



cifico settore disciplinare che vede insieme didattici e storici della matematica) e corsi specifici nelle lauree magistrali in Matematica. Al momento in cui è stato scritto questo testo, l'unico manuale con una notevole diffusione appositamente pensato per corsi di questo genere è il libro *Elementi di didattica della matematica* di Bruno D'Amore, punto di riferimento sicuramente importante, ma datato 1999.

Abbiamo quindi sentito l'esigenza di provare a offrire un progetto nuovo. Un manuale di didattica della matematica, pensato come sussidio per un corso universitario da 6 o 9 crediti, coerente (vedi nel dettaglio la seconda Appendice, *Didattica della matematica e crediti di metodologie e tecnologie didattiche secondo la nuova normativa*) con gli obiettivi formativi e i contenuti richiesti dalla normativa (DM 616/17) relativa ai 24 CFU nelle discipline antropo-psico-pedagogiche e nelle metodologie e tecnologie didattiche necessari per la partecipazione al concorso. Per questo abbiamo sviluppato un manuale che ripercorresse alcuni risultati classici della ricerca internazionale in didattica della matematica, ma che allo stesso tempo includesse nuovi risultati e interessi della ricerca, avesse un'attenzione specifica per il contesto dell'insegnamento a livello di scuola secondaria in Italia, e fosse caratterizzato dal fatto di includere punti di vista e competenze differenziate. Questo è infatti un testo pensato e redatto da quattro persone: due ricercatori nel campo della didattica della matematica, e due ricercatori in altri ambiti della matematica (rispettivamente logica matematica e matematica applicata, entrambi con una solida esperienza nella divulgazione). Siamo partiti da una base di assunti condivisi – criticità di un certo tipo di insegnamento della matematica; necessità di considerare, interpretare e capire le difficoltà degli studenti nell'apprendimento; importanza della condivisione degli strumenti teorici e dei risultati prodotti dalla didattica della matematica – per confrontarci poi su tutto il resto. La convinzione è che questo confronto, tra punti di vista, sensibilità e competenze diverse, abbia arricchito il testo, costringendo ognuno di noi a parlare e farsi capire dagli altri, e in qualche modo aumentando la nostra chiarezza su molti punti.

Prima di illustrare l'organizzazione di questo testo, ci teniamo a chiarire un punto importante. Lo scopo del manuale non è in nessun modo quello di spiegare concetti matematici a qualcuno che si presume già li conosca, ma piuttosto quello di offrire una panoramica selezionata di riflessioni epistemologiche e didattiche all'interno del contesto matematico, per costruire strumenti teorici di consapevolezza relativi all'apprendimento e insegnamento della matematica, e di conseguenza fornire suggerimenti metodologici e illustrare per far conoscere tutta una serie di materiali selezionati e sperimentati negli anni.

Il manuale vuole essere anche una prima finestra sulla ricerca in didattica della matematica, per mostrarne il fascino dei metodi e dei risultati e invitare il lettore all'approfondimento tramite la consultazione dei testi originali (per questo motivo la bibliografia proposta è particolarmente ricca).

A chi è rivolto questo testo? Sembrerebbe una domanda quasi retorica visto quello che abbiamo scritto finora, ma in realtà non è così. Cre-

diamo che i possibili interessati appartengano a tipologie di fruitori abbastanza diverse: sicuramente il docente di un corso di Didattica della matematica e di conseguenza lo studente di laurea magistrale in Matematica interessato all'insegnamento, ma anche quello interessato a un possibile percorso accademico nell'ambito della ricerca in didattica della matematica; l'insegnante di scuola secondaria che voglia un confronto con i risultati di tale ricerca, per ottenere concreti spunti per il suo lavoro; infine tutti coloro che abbiano la curiosità di approfondire il perché, dal punto di vista didattico, la matematica risulti spesso molto difficile o più semplicemente vogliono conoscere gli interessi, i metodi, e i risultati della ricerca in didattica della matematica.

Coerentemente a questa cornice di obiettivi e possibili interlocutori, abbiamo fatto le nostre scelte sui contenuti inclusi nel testo e sulla modalità espositiva. Non sono state scelte facili perché gli argomenti possibili e le attività di riflessione su di esse potrebbero essere moltissimi, ma abbiamo compiuto una scelta ragionata e sicuramente influenzata anche dalle nostre esperienze personali, così come dalle convinzioni, conoscenze e competenze.

Il testo si apre, nel Capitolo 1, con una riflessione su che cosa sia diventata la matematica nella società attuale. Crediamo infatti da una parte che l'insegnamento della matematica, e gli obiettivi che tale insegnamento si pone, debbano necessariamente essere legati al ruolo nella società che riconosciamo alla matematica; dall'altra, che sia importante che insegnanti e studenti sappiano che la matematica è in continua evoluzione, anch'essa per obiettivi, metodi e talvolta assunti. La condivisione dello stato reale della matematica, che si configura come una disciplina estremamente viva e dinamica, è sicuramente importante nell'insegnamento.

L'idea che l'apprendimento, ma sicuramente anche l'insegnamento, sia un processo sociale e che in questo processo giochi dunque un ruolo fondamentale il linguaggio è ormai consolidata. D'altra parte il linguaggio matematico ha delle specifiche complessità che hanno portato a studi approfonditi e a volte molto focalizzati su aspetti particolari. Per questo abbiamo deciso di dedicare il Capitolo 2 proprio al linguaggio matematico e alle specificità che lo distinguono dal linguaggio quotidiano, arrivando a discutere di due *oggetti* matematici molto rilevanti quali le definizioni e le dimostrazioni.

Nel Capitolo 3, in parallelo col Capitolo 1, si discute di che cosa sia la didattica della matematica e si descrive lo sviluppo delle principali teorie dell'apprendimento. Si arriva così a descrivere e discutere alcuni costrutti classici – e molto rilevanti per la pratica didattica – della ricerca in didattica della matematica quali il contratto didattico e la teoria delle situazioni.

Nel Capitolo 4 si affronta un tema delicatissimo: quello delle difficoltà in matematica e della distinzione tra difficoltà ed errore. In particolare, si discutono e si illustrano approcci possibili per contrastare la paura di sbagliare, il terrore di fare errori in matematica: tutte emozioni che compromettono pesantemente la qualità sia dei processi di approfondimento sia l'insegnamento stesso della matematica. Nel capitolo 5, si in-

troduce la questione, molto attuale, dell'approccio a difficoltà in matematica legate ai disturbi specifici di apprendimento (DSA) o a certi tipi di bisogni educativi speciali (BES).

Nel Capitolo 6 si illustra la discussione intorno alla definizione di competenza matematica. Tale discussione ha diversi risvolti educativi: sia nella sua origine (si è infatti cominciato a parlare di competenza matematica, a livello internazionale, proprio nell'affrontare i problemi educativi del nuovo millennio), che nella sua attualità (gli insegnanti di scuola secondaria sono chiamati a sviluppare, consolidare e certificare competenze tra cui quella matematica).

I Capitoli 7 e 8 si focalizzano su due aspetti fondamentali del fare matematica: il problem solving e l'interazione tra i concetti di argomentazione e dimostrazione. Aspetti che sono riconosciuti come obiettivi chiave dell'insegnamento della matematica a livello secondario da Indicazioni Nazionali e Linee Guida. Nel testo si discute anche del fatto che problem solving e argomentazione sono strumenti per l'insegnante: per coinvolgere gli studenti in attività stimolanti e non ripetitive, ma anche come strumenti diagnostici per raccogliere elementi per l'interpretazione delle difficoltà.

Il Capitolo 9 illustra e commenta le indicazioni ministeriali per l'insegnamento della matematica in Italia a livello di scuola secondaria. La convinzione è che la conoscenza e l'analisi critica di tali indicazioni sia fondamentale per l'insegnante. Nel capitolo si confrontano tra loro gli obiettivi dell'insegnamento matematico: quelli del primo ciclo con quelli del secondo ciclo, e quelli dei Licei con quelli degli Istituti Tecnici e Professionali.

Il Capitolo 10 tratta dell'importantissimo argomento dell'uso della tecnologia nell'insegnamento della matematica. Lo schema è quello che contraddistingue tutti i capitoli di questo libro: si tratta prima l'argomento a livello generale di inquadramento teorico (per offrire la possibilità al lettore di ripensare l'uso di qualsiasi strumento tecnologico in una cornice condivisa), introducendo la nozione di «micromondo»; poi, la maggior parte del capitolo discute un esempio specifico di grande rilievo: quello degli ambienti di geometria dinamica. In questo contesto si è preferito tralasciare sviluppi recenti e abbastanza tecnici, tipo la pratica del «coding» nell'insegnamento, o l'uso di software dedicati e stampanti 3D per lo studio della geometria solida, per cui ancora non esiste una pratica consolidata.

Il testo si conclude con un'appendice relativa a un tema non sovrapposto all'insegnamento, ma legato all'idea di condividere la matematica con gli altri: quello della comunicazione e divulgazione della matematica. Crediamo infatti che l'insegnante, oltre a conoscere bene la disciplina che insegna, i principali aspetti epistemologici e didattici legati a ciò che deve insegnare, debba anche essere un buon comunicatore, capace di attrarre e motivare gli studenti. E proprio per questo, conoscere come si sviluppa la comunicazione di una disciplina difficile come la matematica, possa essere un importante fattore di arricchimento.

Infine una raccomandazione. Ovviamente un testo di questo genere non potrà mai essere completo: un corso di didattica della matematica deve fare delle scelte tra gli argomenti che meritano o meno di essere co-

perti. Inoltre l'insegnamento, e in particolare l'insegnamento della matematica, è un mestiere in cui non si può mai veramente dire di non avere più nulla da imparare. Nello scrivere questo manuale, le scelte che abbiamo fatto sono state principalmente guidate dalle nostre esperienze e dalle nostre conoscenze, e speriamo non troppo dalle nostre idiosincrasie. Tuttavia, solo l'utilizzo concreto di questo testo potrà decidere della validità di queste scelte. Aspettiamo di sapere da voi lettori com'è andata.

Anna Baccaglini-Frank  
Pietro Di Martino  
Roberto Natalini  
Giuseppe Rosolini

Pisa-Roma-Genova, dicembre 2017