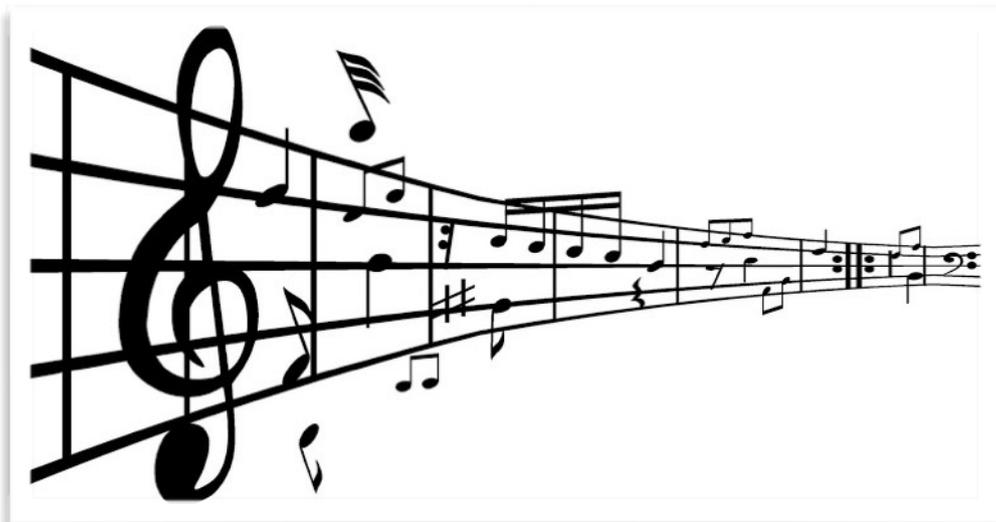




L'OTTAVA NOTA

*La matematica con la musica
dal pentagramma ai monomi passando per le potenze*



Prof. Gianluigi Boccalon

Prof.ssa Bruna Dametto

INTRODUZIONE

Lo scorso anno scolastico (2015-2016) ho avuto l'opportunità di avere come collega di potenziamento la Prof.ssa Bruna Dametto, docente di musica e maestra di coro, che ha svolto la sua attività in compresenza durante le ore di Matematica e di Scienze.

Era stata associata alle mie classi in quanto classi prime con alunni che avevano alcune difficoltà attentive, di comprensione e di comportamento

Il primo giorno che è arrivata in classe (era anche il primo giorno in cui l'ho conosciuta) ho subito pensato di coinvolgerla facendo in modo che potesse mettere al servizio della classe intera le sue competenze specifiche in ambito musicale.

Ma che c'azzecca la Matematica con la Musica?

Si può dire che la Matematica e la musica Musica siano aspetti diversi di un'unica disciplina in quanto i meccanismi logici e di calcolo, che stanno alla base di entrambe sono gli stessi.

Anche qui, come insegnante di Matematica ho dovuto liberarmi dal condizionamento della programmazione legata al libro di testo e lasciarmi guidare dalla programmazione di prima media di Educazione Musicale.

Una delle prime cose che vengono affrontate dal libro di Educazione Musicale sono le figure musicali ed i loro valori.

L'unità di misura del tempo, le famose "battute" musicali, altro non sono che l'espressione di una forma particolare di misura che parte dal concetto sia di frazione sia di unità.

Normalmente all'inizio di un pentagramma, dopo la chiave musicale adeguata che in genere per la scuola media è la "chiave di sol", viene indicata una frazione che dà il valore temporale della battuta.

Si avranno perciò battute di $4/4$, di $3/4$ o di $2/4$.

Tutte le note che vengono inserite all'interno delle "barre verticali" che delimitano la "battuta" dovranno dare come somma il valore messo all'inizio del pentagramma.

Ma come vengono indicate le frazioni che come somma dovranno dare il valore scritto all'inizio del rigo musicale?

Tutte queste frazioni sono rappresentate da figure musicali che in base alla loro forma indicano un ben preciso valore numerico.

I loro nomi sono:

Semibreve, Minima, Semiminima, Croma, Semicroma, Biscroma e Semibiscroma.

La Semibreve è la figura che rappresenta il valore di maggior durata che viene indicato con l'unità e più precisamente con il valore di $4/4$.

La Minima e la sua esatta metà e rappresenta il valore di $\frac{2}{4}$. Ci vogliono 2 Minime per fare una Semibreve

La Semiminima è la metà della minima e vale $\frac{1}{4}$.

In pratica ci vogliono 4 Semi Minime per fare una Semi Breve e 2 Semi Minime per fare una Minima.

La Croma è la metà della Semi Minima e vale $\frac{1}{8}$, per tanto ci vorranno 8 Crome per fare una Semibreve, 4 Crome per fare una Minima e 2 Crome per fare una Semi Minima.

La Semicroma è la metà della Croma e vale $\frac{1}{16}$, per tanto ci vorranno 16 Semi Crome per fare una Semi Breve, 8 Semi Crome per fare una Minima, 4 Semi Crome per fare una Semi Minima, 2 Semi Crome per fare una Croma.

La Biscroma è la metà di una Semi Croma e vale $\frac{1}{32}$, per tanto ci vorranno 32 Biscrome per fare una Semi Breve, 16 Biscrome per fare una Minima, 8 Biscrome per fare una Semi Minima, 4 Biscrome per fare una Croma, 2 Biscrome per fare una Semi Croma.

La Semibiscroma è metà della Biscroma vale $\frac{1}{64}$, per tanto ci vorranno 64 Semi Biscrome per fare una Semi Breve, 32 Semi Biscrome per fare una Minima, 16 Semi Biscrome per fare una Semi Minima, 8 Semi Biscrome per fare una Croma, 4 Semi Biscrome per fare una Semi Croma e 2 Semi Biscrome per fare una Biscroma.

Già a questo punto risulta chiaro che siamo entrati a piene mani nel campo della Matematica.

Nei libri di testo, questo concetto viene spiegato in pratica alla fine della classe Prima.

Ma se l'insegnante di Musica deve introdurre il concetto all'inizio dell'anno come può l'Insegnante di Matematica dargli una mano se nel suo libro di testo l'argomento è posizionato alla fine?

Ovviamente si deve trovare una strategia idonea per poter dare un sostegno adeguato all'Insegnante di Musica ed allo stesso tempo organizzare un percorso didattico completo, organico ed efficace.

L'arrivo in classe della collega di potenziamento mi ha fatto balenare un'idea ed avendo a disposizione nell'aula una lavagna doppia, le ho chiesto di "tradurre" in figure musicali su una lavagna l'espressione che io stavo scrivendo nell'altra.

Così un'espressione con somma e differenza di frazioni si è trasformata in un'espressione con somma e differenza di figure musicali.

Per poter operare con le diverse figure musicali si doveva trovare una strategia che permettesse la loro trasformazione in figure dello stesso tipo in modo da poterne effettuare sia la somma che la differenza.

La prima regola che abbiamo messo in campo è stata quella di trasformare i numeri pari di figure di ordine inferiore in figure di ordine immediatamente superiore dividendo il numero

per due; analogamente ogni gruppo di figure di ordine superiore poteva essere trasformato in uno di ordine inferiore moltiplicando per due il numero che lo rappresentava.

Attraverso questa semplice operazione si è riusciti a trovare una serie di gruppi di figure omogenee che è stato possibile sommare e sottrarre.

In questo modo, quasi senza accorgersi, è passato il concetto di frazione equivalente (una Cromma corrisponde a 2 Semicrome o a 4 Biscrome ecc...)

Si è così passati all'analisi "dell'Albero della Musica" che altro non era che la rappresentazione grafica dei valori delle varie figure musicali partendo dalla Semibreve ed arrivando alla Semi Biscroma.

Un altro concetto che piano piano è passato (in forma grafica) è stato quello di "figura simile" che tanto si avvicina al concetto di "monomio simile".

Mentre l'insegnante di Musica procedeva con la sua normale programmazione, io e la Prof.ssa Dametto approfondivamo di giorno in giorno la tematica relativa alla risoluzione delle espressioni con le figure musicali raggiungendo questi risultati:

- 1) la facilitazione della comprensione dei concetti di Musica e l'esecuzione di semplici brani musicali al flauto dolce.*
- 2) l'esecuzione di calcoli attraverso l'utilizzo di altre forme grafiche e non semplicemente numeriche.*
- 3) Il consolidamento del concetto di "frazione" attraverso una sua diversa modalità di visualizzazione.*
- 4) l'acquisizione "inconscia" del concetto di monomio simile che sarà alla base del futuro calcolo algebrico letterale.*

Questo "insolito" approccio al calcolo matematico ha destato non poche perplessità nei genitori che non erano in grado di seguire i figli nel percorso di apprendimento, perplessità che sono state risolte durante i singoli colloqui personali in cui ho spiegato loro le procedure di calcolo specifiche.

Ci sono stati genitori che hanno preso appunti personali ed altri che hanno fotografato le espressioni svolte con le figure musicali alla lavagna.

I ragazzi si sono mostrati un po' spiazzati in quanto troppo abituati a ragionare per compartimenti stagni, abituati a vedere separatamente le singole materie e a non coglierne le caratteristiche che le accomunano.

Questo esercizio di osservazione, che si potrebbe definire "trova gli elementi comuni" è servito proprio a introdurre la riflessione sull'importanza dei collegamenti, del

ragionamento e di quanto i pregiudizi possano condizionare la nostra capacità di apprendere.

Il feeling con la Prof.ssa Bruna Dametto ha dato da subito i suoi frutti e per i ragazzi è stato assolutamente “normale” interagire in Matematica con un Insegnante di Musica divenuta una presenza importante per la classe.

Dopo il primo mese e mezzo le lezioni si sono evolute con una completa interazione tra me e la collega.

I reciproci interventi in classe ormai avevano raggiunto una totale sintonia ed organizzazione sia nei modi sia nei tempi.

L'esperienza nella gestione di cori le aveva fatto assumere un ruolo molto importante nella fase di “ripetizione” corale delle regole e delle proprietà che via via si andavano a studiare tanto che era in grado di “dirigerne” l'esposizione scandendo i tempi e le modalità della pronuncia.

A fine anno, facendo un'analisi della programmazione complessiva, ci siamo accorti della mole di lavoro che era stata svolta.

La modalità operativa che avevamo messo in atto aveva così dato i suoi frutti anche con gli alunni con difficoltà.

Mentre io avevo indicato la tempistica e i “titoli” dei temi da trattare, la mia collega mi aveva aiutato nella gestione degli stessi grazie ai suoi interventi sia chiarificatori sia di ripetizione.

Tali interventi hanno permesso un buon “ripasso” dei concetti e ne hanno favorito sia la comprensione sia la memorizzazione.

Ovviamente di tutto questo percorso ne hanno tratto un gran profitto i ragazzi con maggiori difficoltà, che hanno così potuto comprendere, ripassare e recuperare anche i concetti più complessi.

I ragazzi più bravi hanno potuto esercitarsi nel “collegamento” delle informazioni, nel consolidamento e nell'approfondimento delle stesse, attivando nuove modalità di approccio alla materia e nuovi stimoli culturali.

Questo approccio “trans-disciplinare” dei contenuti affrontati è stato molto più efficace di quanto ci fossimo aspettati inizialmente e ci ha permesso di capire quanto sia ancora ampio il margine di operatività che noi docenti abbiamo a disposizione.

Forse non ci siamo ancora resi conto che gli strumenti in nostro possesso, se utilizzati in modo adeguato, possono portare a risultati inaspettati. Con ogni probabilità i percorsi didattici a cui ci siamo adattati, o per meglio dire “adeguati”, ci hanno portato a sottostimare le potenzialità dei nostri alunni.

La rincorsa al livellamento verso il basso, alla parcellizzazione del sapere, alla “semplificazione estrema” (eccessiva) dei contenuti, stanno portando ad un abbassamento vertiginoso della qualità delle conoscenze.

Si parla sempre di approccio puri disciplinare ai contenuti ma sempre di più ci si trova di fronte all’acquisizione di nozioni racchiuse in griglie dai bordi talvolta invalicabili.

Le singole discipline vengono troppo spesso parcellizzate, suddivise e catalogate in schemi rigidi che portano a non collegare addirittura parti diverse degli stessi concetti.

Sempre più si rischia che lo studente diventi un “ripetitore” di nozioni che lui stesso non è in grado di collegare alla realtà quotidiana.

Questo scollamento della scuola e del sapere dalla vita reale ha come conseguenza uno svilimento del sapere teso che viene considerato sempre più un obbligo di scarsa utilità.

Trasformare la didattica “classica” in didattica “trans-disciplinare” ci permette di costruire quei ponti che collegano le conoscenze alla vita reale, ritornando al sapere quella dignità e importanza che gli permettono di essere quello strumento fondamentale su cui poggiano le basi dello sviluppo della persona.

Prof. Gianluigi Boccalon

LA MATEMATICA CON LA MUSICA

LE FRAZIONI

Abbiamo iniziato il percorso con le frazioni prendendo in considerazione le figure con cui si rappresenta il tempo nelle partiture musicali.

Una frazione è un particolare modo di rappresentare l'operazione di divisione. Ogni Frazione è composta di 3 parti:

A) Numeratore

B) Denominatore

C) Linea di frazione

La linea di frazione è il simbolo che rappresenta fisicamente l'operazione di divisione ed è l'equivalente dei due punti (:) che abbiamo sempre utilizzato alla scuola elementare.

La Frazione viene anche definita, come vedremo più avanti, "Rapporto". questo è un esempio classico di Frazione



Quando in una frazione il Numeratore è uguale al Denominatore la Frazione rappresenta l'unità o l'intero.

$$4/4 = 4:4 = 1 \text{ intero}$$

$$8/8 = 8:8 = 1 \text{ intero}$$

$$16/16 = 16:16 = 1 \text{ intero}$$

$$32/32 = 32:32 = 1 \text{ intero}$$

$$64/64 = 64:64 = 1 \text{ intero}$$

Più avanti ci occuperemo di come classificare le frazioni e di come operare con esse.

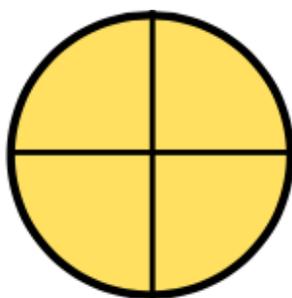
Ora cerchiamo di capire, anche visivamente, come le frazioni siano collegate alla musica. Per semplificare il concetto partiamo dal tempo 4/4 che è rappresentato dalla figura Semibreve .

La Semibreve è una figura musicale rappresentata da un tondo vuoto che ipotizziamo essere la nostra unità o “Torta” completa

La Semibreve rappresenta perciò la nostra “torta” completa del tempo ed è composta da 4 parti



Graficamente il concetto lo si può esprimere con il cerchio giallo .

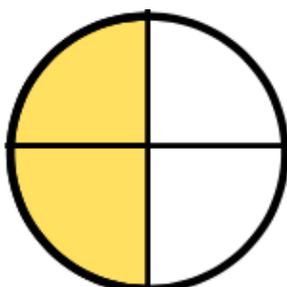


La Minima è una figura musicale rappresentata da un tondo vuoto attaccato ad una gambetta verticale.

Il suo valore numerico rappresenta la metà della semibreve e per tanto sarà di $2/4$



Graficamente il concetto lo si può esprimere con il cerchio giallo .

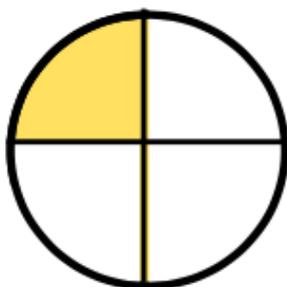


La Semiminima graficamente è fatta come la minima ma il tondo questa volta è pieno ed è completamente nero.

Dal punto di vista numerico rappresenta la metà della Minima e per tanto il suo valore sarà di $1/4$.



Graficamente la possiamo rappresentare con la solita "Torta"



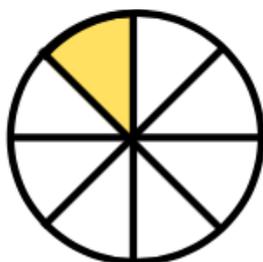
La Croma si rappresenta graficamente come una Semiminima a cui viene aggiunta una piccola "gambetta" trasversale dalla parte opposta del tondo.

Dal punto di vista numerico corrisponde a metà della Semiminima e per tanto il suo valore sarà di $1/8$.

In pratica abbiamo diviso a metà le 4 fette della "Torta" originale che assumerà il valore di $8/8$.



Graficamente possiamo esprimere il valore numerico della Croma nel seguente modo



Nelle partiture musicali le Crome come le Semicrome, le Biscrome e le Semibiscrome possono essere unite assieme proprio dalle “gambette” trasversali, in modo da formare gruppi di 2; 3; 4...ecc...



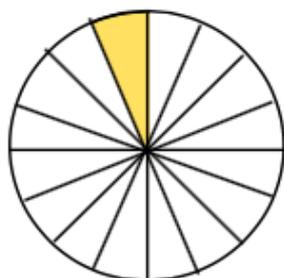
La Semicroma corrisponde numericamente a metà della croma e per tanto dovremo tagliare ancora a metà la nostra “fettina di Torta” ed in questo modo la nostra “unità” sarà rappresentata da una frazione di $16/16$.

La nostra “fettina” corrisponderà ad $1/16$ che è il valore della Semicroma.



Graficamente la si distingue dalla Croma per la presenza di una seconda “gambetta trasversale sotto alla prima.

La nostra “torta” sarà perciò rappresentata nel seguente modo e la Semicroma sarà la “fettina” gialla



La Biscroma corrisponde numericamente a metà della Semicroma e per tanto il suo valore numerico sarà di $1/32$ e la nostra “Torta” sarà divisa in 32 fette.

Per la difficoltà di rappresentarle graficamente per la Biscroma e la Semibiscroma non faremo il disegno della “Torta”.

La Biscroma è simile alla Semicroma solo che vi è stata aggiunta una terza “gambetta trasversale.



Come per le Crome e le Semicrome, anche le Biscrome, possono essere unite in gruppi di varie figure.



L'ultima figura che andremo ad analizzare sarà la Semibiscroma.

Molte volte nei concerti e in vari brani musicali possiamo assistere a "virtuosismi" messi in atto da artisti di grande valore.

Questi musicisti sono in grado di eseguire sequenze di note a velocità elevatissime.

Il tempo associato a queste figure sarà perciò brevissimo.

La Biscroma e la Semibiscroma sono proprio le figure che vengono usate nelle partiture per descrivere proprio questi "virtuosismi"

La Semibiscroma ha il valore di metà Biscroma ed è rappresentata da una quarta gambetta trasversale.

Il suo valore numerico è di $1/64$.



Generalmente la Semibiscroma è rappresentata da gruppi di note unite tra loro come abbiamo già potuto osservare con Crome, Semicrome e Biscrome.

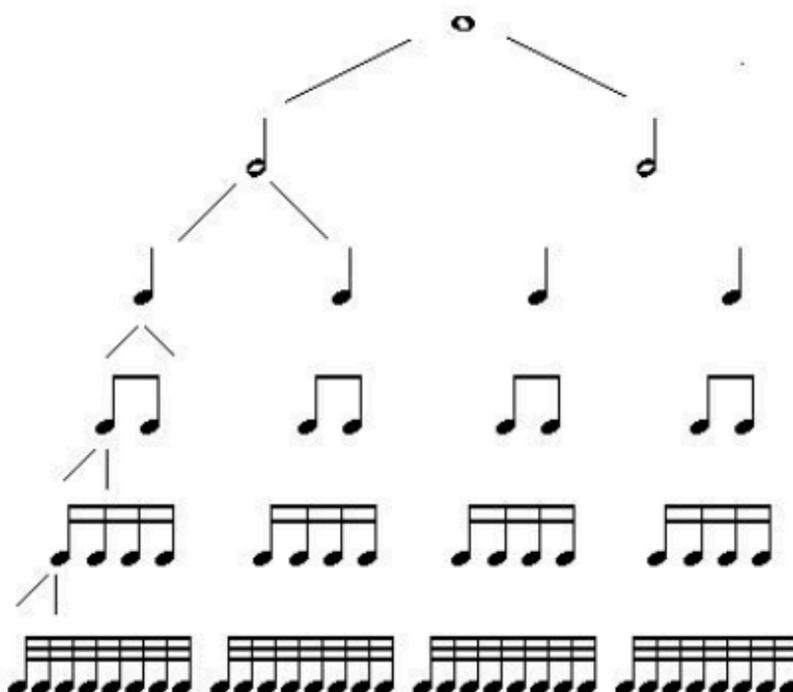


L'ALBERO DELLA MUSICA

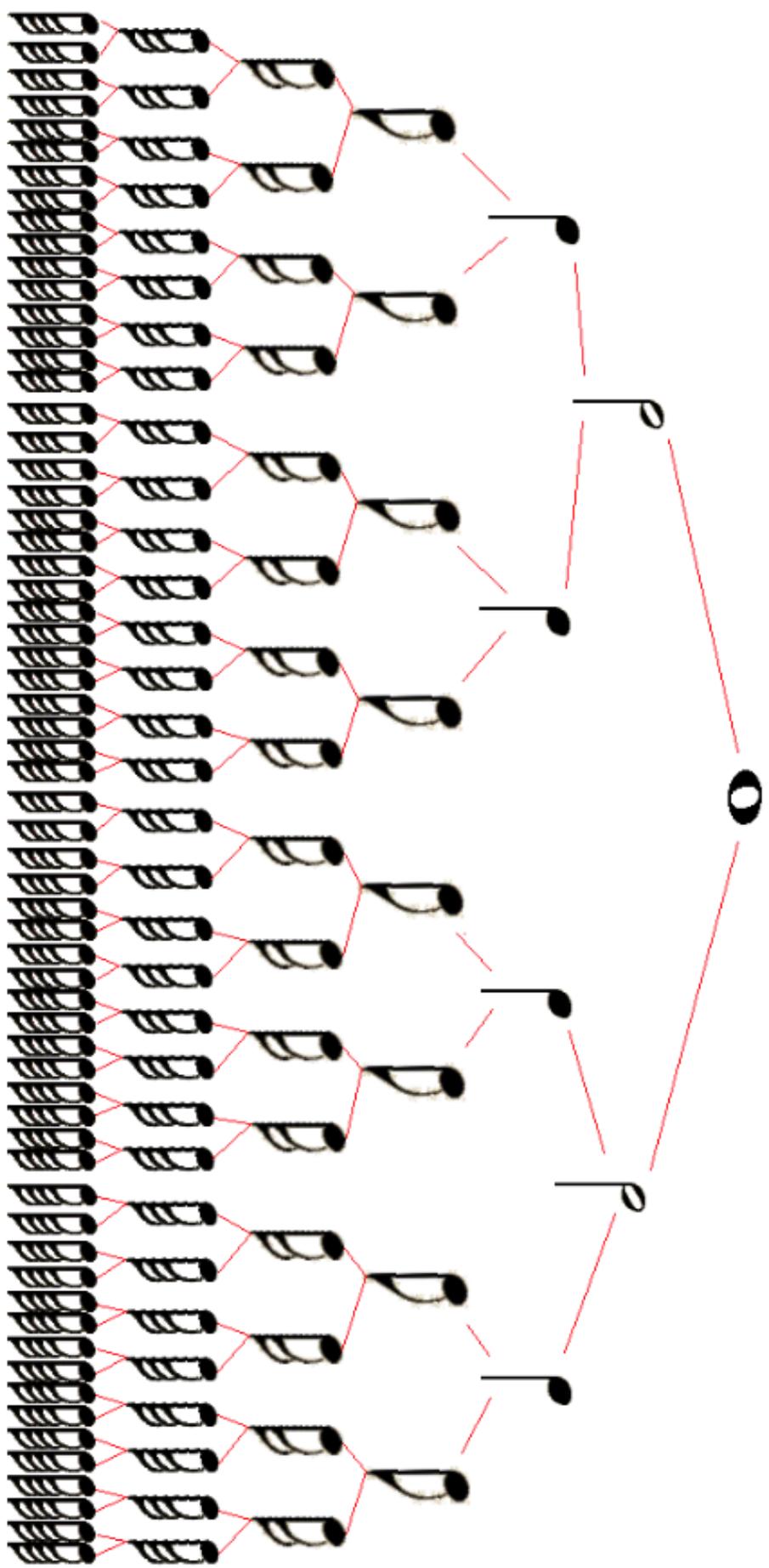
Possiamo ora raccogliere tutte le informazioni e provare ad unire assieme tutte le figure in modo da formare quello che possiamo chiameremo l'Albero della Musica.

In un unico diagramma possiamo definire "visivamente" i rapporti tra le varie figure ed iniziare a fare qualche piccola operazione con esse.

	semibreve	4/4
	minima	2/4
	semiminima	1/4
	croma	1/8
	semicroma	1/16
	biscroma	1/32
	semibiscroma	1/64



	+		+		=	
2/8	+	2/4	+	4/16	=	4/4
1/4	+	2/4	+	1/4	=	4/4



Grazie all'Albero della Musica abbiamo capito un po' meglio i rapporti tra le varie figure e possiamo perciò stabilire una sorta di progressione tra una figura e l'altra.

La figura di "Ordine Superiore" è sempre il doppio di quella immediatamente di "Ordine Inferiore".

Possiamo esprimere il concetto anche in questo modo:

"La figura precedente è sempre il doppio di quella successiva".

Ovviamente consideriamo sempre la Semibreve (4/4 e cioè l'unità) come figura prima di riferimento.

Detto questo, come abbiamo potuto osservare dall'Albero della Musica, per fare una figura precedente ci vogliono sempre 2 figure successive.

Si potrà perciò scrivere:

$$\text{O} = 2 \text{d} = 2 \times (2 \text{c}) = 2 \times (2 \times (2 \times \text{b})) = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times \text{a})))$$

Possiamo perciò esprimere più semplicemente il valore di ogni figura "in funzione" di quella successiva

$$\text{O} = 2 \text{d} = 4 \text{c} = 8 \text{b} = 16 \text{a} = 32 \text{g} = 64 \text{f}$$

Sulla base di queste considerazioni si potranno "semplificare" espressioni in cui utilizzeremo le figure musicali alla stessa stregua delle frazioni.

Per rendere ancora più facile il calcolo utilizzeremo il seguente schema:

$$\begin{array}{l} \text{g} \text{g} = \text{a} \\ \text{f} \text{f} = \text{g} \\ \text{e} \text{e} = \text{f} \\ \text{d} \text{d} = \text{e} \\ \text{c} \text{c} = \text{d} \\ \text{b} \text{b} = \text{c} \end{array}$$

Semplificare un'espressione con le figure musicali significa trovare quale figura di ordine superiore è il risultato della mia sequenza.

Per risolvere l'espressione utilizzerò esattamente le stesse procedure che uso normalmente nella risoluzione di quelle aritmetiche.

$$\text{quarta} + \text{quarta} + \text{quarta} + \text{quarta} =$$

$$\text{quarta} + \text{quarta} + \text{quarta} + \text{quarta} =$$

$$\text{quarta} + \text{quarta} + \text{quarta} + \text{quarta} =$$

$$\text{quarta} + \text{quarta} + \text{quarta} + \text{quarta} = 7 \text{quarta} + \text{quarta}$$

Uso delle Parentesi nelle Espressioni con le Figure Musicali

Abbiamo visto come con le figure musicali si possano svolgere delle semplici espressioni algebriche.

Anche se l'argomento delle operazioni mediante calcolo letterale è argomento dei prossimi anni, possiamo però iniziare a prendere confidenza con con alcuni termini che ci saranno d'aiuto in futuro.

Il numero che sta davanti alla figura musicale prende il nome di **COEFFICIENTE** .

Le figure musicali dello stesso tipo (con lo stesso nome e che rappresentano lo stesso intervallo di tempo) le chiameremo figure **SIMILI** .

Le figure SIMILI che hanno lo stesso COEFFICIENTE ma che hanno segni diversi (+ ; -), le chiameremo figure **OPPOSTE** .

Nelle espressioni le figure OPPOSTE si eliminano reciprocamente e nel passaggio successivo non vengono più riscritte (normalmente le figure OPPOSTE vengono barrate).

In una espressione possiamo sommare o sottrarre solo figure SIMILI.

Il risultato sarà una figura SIMILE che avrà come COEFFICIENTE la somma o la differenza dei COEFFICIENTI delle figure considerate.

$$4 \text{ ♪} + 5 \text{ ♪} = (4+5) \text{ ♪} = 9 \text{ ♪}$$

$$8 \text{ ♪} - 6 \text{ ♪} = (8 - 6) \text{ ♪} = 2 \text{ ♪}$$

Ogni figura può essere sempre trasformata in una figura di ordine superiore se il suo COEFFICIENTE è pari.

Così si potranno trasformare:

$$16 \text{ ♪} = 8 \text{ ♪} = 4 \text{ ♪} = 2 \text{ ♪} = \text{♪}$$

Per passare da una figura di ordine inferiore ad una di ordine superiore, basterà dividere il COEFFICIENTE per 2.

In qualunque situazione è invece possibile passare da una figura di ordine superiore ad una di ordine inferiore qualunque sia il COEFFICIENTE.

Per fare questo basterà moltiplicare per 2 il valore del COEFFICIENTE della figura di ordine superiore.

Ci si deve ricordare che quando davanti ad una figura non abbiamo alcun COEFFICIENTE allora il suo valore è 1.

$$\text{♪} = 1 \text{ ♪}$$

$$\text{♩} = 1 \text{ ♩} = 2 \text{ ♪}$$

$$13 \text{ ♪} = 26 \text{ ♪}$$

$$3 \text{ ♪} = 6 \text{ ♪}$$

Fatte queste premesse possiamo introdurre nelle espressioni con le figure musicali l'uso delle parentesi.

Anche con le parentesi dobbiamo avere però alcune accortezze ed è indispensabile ricordare che:

A. Prima di tutto si devono risolvere le operazioni dentro le parentesi tonde e quando siamo arrivati al risultato al loro interno possiamo “togliere” le parentesi. Per fare questa operazione però ci dobbiamo ricordare che:

1. Se davanti alla parentesi tonda abbiamo il segno + si toglie la parentesi lasciando il segno del COEFFICIENTE che compare dentro la parentesi
2. Se davanti alla parentesi tonda abbiamo il segno - si toglie la parentesi ma si cambia il segno al COEFFICIENTE dentro la parentesi.

B. Una volta tolte tutte le parentesi tonde e fatti i ragionamenti sui segni, se davanti ad una figura il COEFFICIENTE non presenta alcun segno, allora si deve considerare come segno il segno + ($3 = +3$). Si risolve tutto quello che sta dentro le parentesi quadre (eliminando le figure opposte) e trasformando le figure rimanenti in figure simili di ordine superiore o inferiore in modo da poterne effettuare la somma algebrica. Fatto questo possiamo togliere le parentesi quadre, avendo però l'accortezza di rifare i ragionamenti sul segno che avevamo fatto prima e cioè

3. Se davanti alla parentesi quadra abbiamo il segno + si toglie la parentesi lasciando il segno del COEFFICIENTE che compare dentro la parentesi
4. Se davanti alla parentesi quadra abbiamo il segno - si toglie la parentesi ma si cambia il segno al COEFFICIENTE dentro la parentesi.

C. Una volta tolte anche le parentesi quadre risolviamo tutte le operazioni dentro le parentesi graffe, con le stesse modalità che abbiamo visto fino ad ora. Una volta che si è semplificato tutto, eliminate le figure opposte, possiamo togliere le parentesi graffe mettendo in atto le solite accortezze sui segni

5. Se davanti alla parentesi graffa abbiamo il segno + si toglie la parentesi lasciando il segno del COEFFICIENTE che compare dentro la parentesi
6. Se davanti alla parentesi graffa abbiamo il segno - si toglie la parentesi ma si cambia il segno al COEFFICIENTE dentro la parentesi.

D. Una volta che si sono tolte tutte le parentesi si eseguono i calcoli nell'ordine in cui sono scritti, eliminando le figure opposte e trasformando le altre nelle figure simili più convenienti.

Detto questo siamo in grado di svolgere le espressioni con le figure musicali facendo anche attenzione ai loro segni relativi.

A questo punto i ragazzi hanno acquisito una certa “familiarità” con le figure musicali e riescono a destreggiarsi, chi più e chi meno, anche nel calcolo “algebrico” che utilizza questi simboli grafici come delle “grandezze” o delle particolari unità di misura.

Si è così passati dalle “unità” lineari dei segmenti, alle unità “areali” delle figure sul piano cartesiano, alle “unità” di tempo usate nella musica.

Ovviamente anche l’insegnante di Educazione Musicale si è trovata avvantaggiata dal fatto che i ragazzi hanno visto il concetto legato alle figure musicali da un’altra angolazione che ha però permesso loro di acquisire una maggiore “dimestichezza” relativamente alla loro lettura ed interpretazione anche all’interno della partitura.

È in questa fase che si introduce un nuovo concetto matematico che è quello relativo alle potenze dei numeri.

Anche in questo caso le figure musicali ne diventano l’approccio visivo e permettono di partire ad analizzare questo nuovo aspetto teorico da un’ottica diversa.

Le figure individuano una serie numerica che è stata ben rappresentata graficamente “dall’Albero della Musica” (che oltretutto l’insegnante di Educazione Musicale ha messo in bella mostra nell’aula di Musica).

L’Albero della Musica è diventato così una sorta di “messaggio subliminale” che i ragazzi piano piano hanno “registrato” senza accorgersi.

L’Albero della Musica è stata la “visualizzazione concreta” della serie numerica data dalle figure musicali.

1; 2; 4; 8; 16; 32; 64.....è diventata una sequenza di numeri “visibili” a cui abbiamo associato una logica matematica e di calcolo che l’ha ampliata e sviluppata.

Questa logica di calcolo, che ha portato a conoscere ed imparare le proprietà delle potenze, (fondamentale è stato l’apporto della Prof.ssa Dametto che, da direttrice di coro, ha dato il ritmo alla memorizzazione delle definizioni, facendo in modo che i ragazzi ripetessero assieme, a tempo e con l’intonazione corretta, ogni singola proprietà. È ovvio che all’inizio la classe ha preso questa attività in modo ludico, era proprio uno degli obiettivi che ci eravamo posti, ma proprio questa strategia si è dimostrata vincente e molto efficace sia nella memorizzazione dei concetti e delle proprietà, sia nell’esercizio della memoria, sia nel mantenimento dell’attenzione anche durante attività che sarebbero potute essere ripetitive e noiose). Debbo dire che la collega è stata “magica” nel coinvolgere la classe a stare a tempo, attenta alla pronuncia precisa delle frasi ma soprattutto concentrata nel compito. Forse i ragazzi hanno preso queste lezioni più come lezioni di canto e si sono sentiti un “coro” diretto da un vero maestro.

Sinceramente mi sono stupito anch’io di quanto tempo la classe sia riuscita a mantenere viva sia l’attenzione sia la concentrazione.

Molto spesso allo scadere delle due ore di lezione, più di qualcuno ha esclamato: “No! Già finita.....proprio adesso che ci stavamo divertendo!”. Frase ovviamente molto significativa.

Le Potenze

Abbiamo visto la serie numerica che porta dalla Semibreve alla Semibiscroma:

1; 2; 4; 8; 16; 32; 64

Come abbiamo ben visto con “l’Albero della Musica”.

Questa serie di numeri può essere espressa da una serie di moltiplicazioni che, per la loro particolarità, vengono definite “**Potenze**”

Vediamo ora queste moltiplicazioni con le loro caratteristiche e le loro particolarità.

Infatti una Semibreve () corrisponde sempre a:

2 Minime ()

4 Semiminime ()

8 Crome ()

16 Semicrome ()

32 Biscrome ()

64 Semibiscrome ()

Come abbiamo ben visto con “l’Albero della Musica”.

Questa serie di numeri può essere espressa da una serie di moltiplicazioni che, per la loro particolarità, vengono definite “**Potenze**”

Vediamo ora queste moltiplicazioni con le loro caratteristiche e le loro particolarità.

1	=	1	=	2^0
2	=	2	=	2^1
4	=	2×2	=	2^2
8	=	$2 \times 2 \times 2$	=	2^3
16	=	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	=	2^4
32	=	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	=	2^5
64	=	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	=	2^6
128	=	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	=	2^7
256	=	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	=	2^8
512	=	$2 \times 2 \times 2$	=	2^9

Questa particolare moltiplicazione prende il nome di **Elevamento a Potenza**.

Come si può notare la potenza viene indicata da due numeri che sono definiti “base” ed “esponente”

Esponente

2⁵ = 32

Base **Potenza**

Elevare a potenza un numero significa moltiplicarlo tante volte per se stesso quante ne indica l’esponente

La potenza che abbiamo appena scritto si legge : due alla quinta uguale trentadue

Il valore di 2^5 è perciò 32 e corrisponde al risultato della moltiplicazione di 2 per se stesso cinque volte.

$$2^5 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 32$$

Ritorniamo ora alla nostra serie e consideriamo i valori : 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64

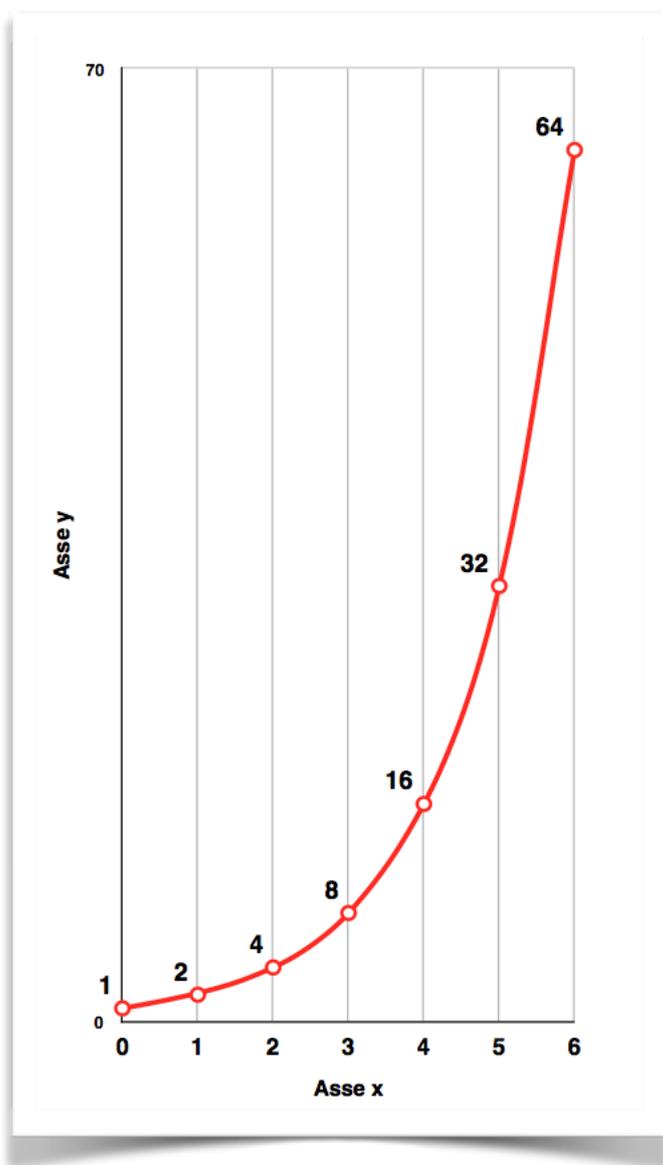
Questi valori rappresentano una particolare formula matematica che prende il nome di “funzione” e più precisamente rappresentano la funzione “esponenziale” che si rappresenta con:

$$y = 2^x$$

Da questa "funzione" possiamo ricavare la seguente tabella:

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

Osservando questa serie di numeri abbiamo così introdotto un nuovo modo di rappresentare la moltiplicazione.



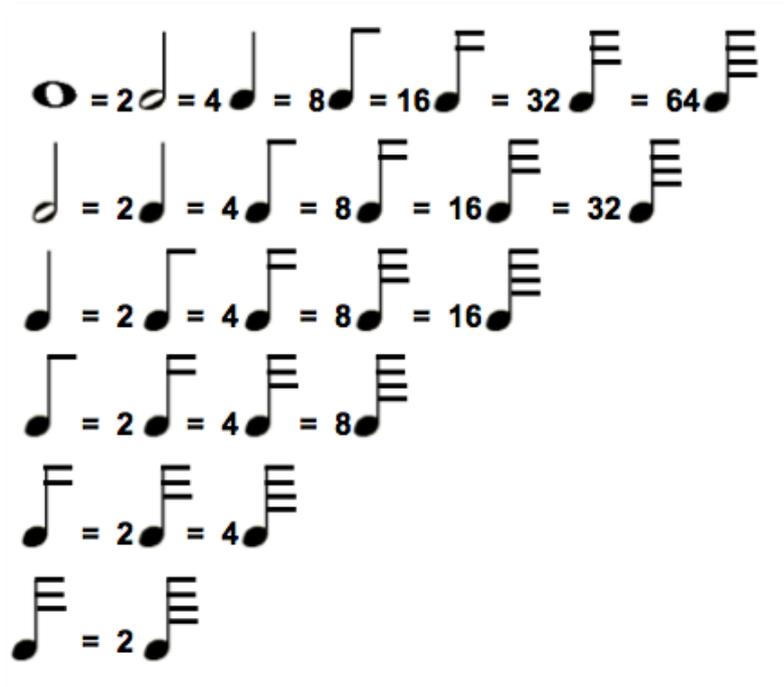
Possiamo perciò riassumere tutto quello che abbiamo visto fino ad ora partendo da questo grafico che rappresenta quella che i matematici definiscono “Funzione Esponenziale”.

Ricapitolando

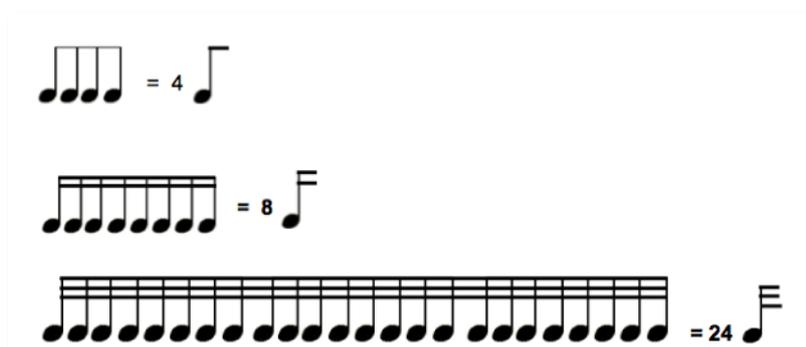
Per ciò che consiste la risoluzione con le espressioni con le figure musicali è bene operare nel seguente modo:

1. Considerare sempre le figure uguali in coppia
2. Considerare tutte le figure “legate” assieme come se fossero tra parentesi
3. Considerare che ogni coppia di figure uguali corrisponde ad una figura di ordine superiore
4. Considerare che si sommano a due a due solo le figure simili

Passiamo ora a ricordare le singole equivalenze



Dobbiamo ricordare che quando abbiamo note legate assieme le possiamo scrivere anche in un altro modo e cioè possiamo utilizzare i coefficienti numerici.



Abbiamo rivisto il concetto di figure SIMILI e come passare da figura di ordine superiore a figura di ordine inferiore e viceversa. Ora andiamo a rivedere come si opera con le parentesi .

Quando si opera con le parentesi dobbiamo risolvere i calcoli prima dentro alle parentesi tonde fino a che si giunge ad una sola figura, poi se davanti alle parentesi tonde c'è un segno - le togliamo cambiando il segno alla nostra figura, se c'è il segno + le togliamo lasciando il segno della nostra figura.

Si risolvono così i calcoli dentro le parentesi quadre fino a che si arriva ad avere un'unica figura. Se davanti alla parentesi quadra c'è il segno - la si toglie ma si cambia il segno della figura, mentre se davanti alla parentesi quadra c'è il segno + la si toglie lasciando il segno della figura.

Si risolvono così i calcoli dentro le parentesi graffe fino a che non si giunge ad un'unica figura. Se davanti alla parentesi graffa c'è il segno - la si toglie ma si cambia il segno della figura, mentre se davanti alla parentesi graffa c'è il segno + la si toglie lasciando il segno della figura.

Tolte tutte le parentesi si eseguono i calcoli nell'ordine in cui sono scritti fino a giungere al risultato finale

$$\circ + \text{d} - \left\{ \text{d} + 4 \text{d} - 2 \text{d} + \left[\circ - 4 \text{d} - \left(4 \text{d} + 8 \text{d} + \text{d} \right) \right] \right\} + \text{d} =$$

$$\circ + \text{d} - \left\{ \text{d} + 4 \text{d} - 2 \text{d} + \left[\circ - 4 \text{d} - \left(\text{d} + \text{d} + 2 \text{d} \right) \right] \right\} + \text{d} =$$

$$\circ + \text{d} - \left\{ \text{d} + 2 \text{d} - \text{d} + \left[\circ - 2 \text{d} - 2 \text{d} \right] \right\} + \text{d} =$$

$$\circ + \text{d} - \left\{ \text{d} + 2 \text{d} - \text{d} + \left[\cancel{4 \text{d}} - \cancel{2 \text{d}} - \cancel{2 \text{d}} \right] \right\} + \text{d} =$$

$$2 \text{d} + \text{d} - \left\{ 3 \text{d} - \text{d} \right\} + \text{d} =$$

$$2 \text{d} + \text{d} - \left\{ 6 \text{d} - \text{d} \right\} + \text{d} =$$

$$8 \text{d} + \cancel{4 \text{d}} - \cancel{5 \text{d}} + \cancel{\text{d}} =$$

$$8 \text{d} = \circ$$

NOTA BENE

Se in una parentesi troviamo una serie di figure simili che hanno segni diversi, possiamo sommare tra di loro tutte quelle con il segno+ e sommare tra loro tutte quelle con il segno- .

Alla fine si farà la differenza tra il risultato con il segno + e il risultato con il segno - .

$$\begin{array}{l} 2 \text{ 🎵} - 3 \text{ 🎵} + 6 \text{ 🎵} - 12 \text{ 🎵} + 8 \text{ 🎵} = \\ \left(2 \text{ 🎵} + 6 \text{ 🎵} + 8 \text{ 🎵} \right) - \left(3 \text{ 🎵} + 12 \text{ 🎵} \right) = \\ 16 \text{ 🎵} - 15 \text{ 🎵} = \text{ 🎵} \end{array}$$

Un'altra soluzione è quella di scrivere una dopo l'altra tutte le figure con il segno + e poi di seguito tutte le figure con il segno - .

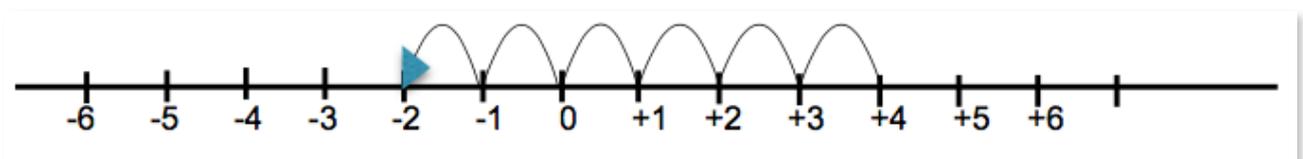
Alla fine si svolgono le operazioni nell'ordine in cui sono scritte.

$$\begin{array}{l} 2 \text{ 🎵} + 6 \text{ 🎵} + 8 \text{ 🎵} - 3 \text{ 🎵} - 12 \text{ 🎵} = \\ 8 \text{ 🎵} + 8 \text{ 🎵} - 3 \text{ 🎵} - 12 \text{ 🎵} = \\ 16 \text{ 🎵} - 3 \text{ 🎵} - 12 \text{ 🎵} = \\ 13 \text{ 🎵} - 12 \text{ 🎵} = \text{ 🎵} \end{array}$$

Può anche capitare che in un espressione ci si trovi davanti ad una operazione di questo tipo:

$$4 \text{ 🎵} - 6 \text{ 🎵}$$

Dobbiamo allora considerare la retta dei numeri



Ci si pone sul valore del primo numero e ci si sposta di tante unità quante ne indica il secondo.

Il movimento sarà verso destra se è positivo e verso sinistra se è negativo.

Nel nostro caso ci si sposterà di 6 unità verso sinistra ed il risultato sarà perciò

$$4 \text{ ♩} - 6 \text{ ♩} = -2 \text{ ♩}$$

Esercizi

1)

$$16 \text{ ♩} + 8 \text{ ♩} - \text{♩} + 2 \text{ ♩} + \text{♩} - \text{♩} + 3 \text{ ♩} - \text{♩} =$$

2)

$$\text{♩} - 3 \text{ ♩} + \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} - \text{♩} - 3 \text{ ♩} - [\text{♩} - 6 \text{ ♩} + \text{♩} + 4 \text{ ♩} + 2 \text{ ♩}] + \text{♩} =$$

3)

$$\text{♩} + 4 \text{ ♩} + 2 \text{ ♩} + \text{♩} - \text{♩} - 4 \text{ ♩} - [\text{♩} + \text{♩} - \text{♩} + 2 \text{ ♩} + 4 \text{ ♩} + 8 \text{ ♩}] + \text{♩} =$$

4)

$$\text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} - \text{♩} + \text{♩} - \text{♩} + 3 \text{ ♩} - \text{♩} =$$

5)

$$\text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} + \text{♩} + \text{♩} - \text{♩} + \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} =$$

6)

$$4 \text{ ♩} + 2 \text{ ♩} - \text{♩} + 5 \text{ ♩} - \text{♩} =$$

7)

$$6 \text{ ♩} + \text{♩} - \text{♩} + \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} - \text{♩} =$$

8)

$$14 \text{ ♩} + \text{♩} - \text{♩} + \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} - \text{♩} =$$

9)

$$\text{♩} + 7 \text{ ♩} - 2 \text{ ♩} + 3 \text{ ♩} - 2 \text{ ♩} =$$

10)

$$\text{♩}^{-2} \left(\text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} + \text{♩} \text{♩} \right) + \text{♩}^{-4} \left(7 \text{♩} + 4 \text{♩} \right) =$$

11)

$$4 \left(3 \text{♩} - 2 \text{♩} + \text{♩} \right) - \text{♩} + \text{♩} =$$

12)

$$\text{♩}^{-3} \text{♩} + 4 \text{♩} - \left\{ \text{♩}^{-3} \text{♩} - \left[\text{♩} - \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} \text{♩} + \left(\text{♩} + 4 \text{♩} + 2 \text{♩} \right) \right] \right\} + \text{♩} =$$

13)

$$\text{♩} + 3 \text{♩} + 16 \text{♩} - \left\{ 2 \text{♩} + 8 \text{♩} + \left[\text{♩}^{-16} \text{♩} + \left(8 \text{♩} + 16 \text{♩} \right) \right] \right\} + \text{♩} =$$

14)

$$16 \text{♩} + \text{♩} + 4 \text{♩} - \left\{ \text{♩} + \text{♩} + \left[\text{♩} + \text{♩} - \left(2 \text{♩} + 4 \text{♩} - 4 \text{♩} - \text{♩} \right) \right] \right\} + \text{♩} =$$

15)

$$\text{♩} + 8 \text{♩} + 16 \text{♩} - \left\{ 2 \text{♩} + 8 \text{♩} + \left[\text{♩}^{-16} \text{♩} + \left(8 \text{♩} + 16 \text{♩} \right) \right] \right\} + \text{♩} =$$

LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE

Con le figure musicali abbiamo introdotto il concetto di potenza e più precisamente il concetto di potenza di 2:

1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512;.....

2^0 2^1 2^2 2^3 2^4 2^5 2^6 2^7 2^8 2^9

Operando con le potenze ci si trova a lavorare con numeri molto grandi o con numeri molto piccoli.

Per facilitare i calcoli (e semplificarci notevolmente la vita) possiamo utilizzare le proprietà delle potenze che ci permettono di operare con gli esponenti e quindi di lavorare con numeri molto più piccoli.

Le proprietà sono 5 e sono le seguenti:

1. **Prodotto di potenze ad ugual base**
2. **Quoziente di potenze ad ugual esponente**
3. **Prodotto di potenze ad ugual esponente**
4. **Quoziente di potenze ad ugual esponente**
5. **Potenza di potenza**

Queste proprietà ci permetteranno di operare in modo rapido utilizzando valori sempre piccoli.

Il risultato sarà sempre espresso in forma di potenza.

Le proprietà vanno ASSOLUTAMENTE imparate a memoria .

Consideriamo il seguente esempio:

$$2^5 * 2^4 = (2*2*2*2*2) * (2*2*2*2) = 2*2*2*2*2*2*2*2*2 = 2^9 = 512$$

$$2^5 = 32$$

$$2^4 = 16$$

$$32 * 16 = 512 = 2^9$$

Analizziamo ora questo calcolo con la prima proprietà

1) Prodotto di Potenze ad ugual Base

Il Prodotto di potenze ad ugual base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$$2^3 * 2^4 = 2^{(3 + 4)} = 2^7$$

$$3^2 * 3^3 = 3^{(2 + 3)} = 3^5$$

$$7^3 * 7^5 = 7^{(3 + 5)} = 7^8$$

$$5^7 * 5^4 = 5^{(7 + 4)} = 5^{11}$$

2) Quoziente di Potenze ad ugual Base

Il Quoziente di potenze ad ugual base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$$2^5 : 2^3 = 2^{(5 - 3)} = 2^2$$

$$3^8 : 3^3 = 3^{(8 - 3)} = 3^5$$

$$7^7 : 7^4 = 7^{(7 - 4)} = 7^3$$

$$5^7 : 5^3 = 5^{(7 - 3)} = 5^4$$

3) Prodotto di Potenze ad ugual Esponente

Il Prodotto di potenze ad ugual esponente è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$2^5 * 7^5 = (2 * 7)^5 = 14^5$$

$$6^8 * 4^8 = (6 * 4)^8 = 24^8$$

$$3^7 * 5^7 = (3 * 5)^7 = 15^7$$

$$8^2 * 9^2 = (8 * 9)^2 = 72^2$$

4) Quoziente di Potenze ad ugual Esponente

Il Quoziente di potenze ad ugual esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$8^5 : 4^5 = (8 : 4)^5 = 2^5$$

$$9^8 : 3^8 = (9 : 3)^8 = 3^8$$

$$28^7 : 7^7 = (28 : 7)^7 = 4^7$$

$$25^4 : 5^4 = (25 : 5)^4 = 5^4$$

5) Potenza di Potenza

La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$(2^2)^5 = 2^{(2 * 5)} = 2^{10}$$

$$(6^3)^8 = 6^{(3*8)} = 6^{24}$$

$$(3^9)^7 = 3^{(9*7)} = 3^{63}$$

$$(8^4)^6 = 8^{(4*6)} = 8^{24}$$

POTENZE DI 10

Nella rappresentazione dei numeri molto grandi, o anche molto piccoli, è fondamentale capire come possiamo interpretarli velocemente senza dover per forza contare gli zeri.

3.750.000.000.000.000 = 3.750 miliardi

3 mila 750 miliardi corrisponde a 3.750 migliaia di miliardi.

Ovviamente la lettura di questi numeri, oltre ad essere molto difficile, spesso induce ad errori nell'interpretazione degli zeri.

Anche la calcolatrice non ci restituisce il numero nella sua "normale" forma aritmetica.

Per rendere più facile l'interpretazione di queste cifre da capogiro, andiamo a considerare le potenze di 10.

Ci dobbiamo però ricordare che "qualsiasi numero elevato ad esponente zero da sempre come risultato 1.

$$10^0 = 1 = \text{unità}$$

$$10^1 = 10 = \text{decine}$$

$$10^2 = 100 = \text{centinaia}$$

$$10^3 = 1.000 = \text{migliaia}$$

$$10^4 = 10.000 = \text{decine di migliaia}$$

$$10^5 = 100.000 = \text{centinaia di migliaia}$$

$$10^6 = 1.000.000 = \text{milioni}$$

$$10^7 = 10.000.000 = \text{decine di milioni}$$

$$10^8 = 100.000.000 = \text{centinaia di milioni}$$

$$10^9 = 1.000.000.000 = \text{miliardi}$$

$$10^{10} = 10.000.000.000 = \text{decine di miliardi}$$

$$10^{11} = 100.000.000.000 = \text{centinaia di miliardi}$$

$$10^{12} = 1.000.000.000.000 = \text{migliaia di miliardi} = \text{biliardi}$$

$$10^{13} = 10.000.000.000.000 = \text{decine di biliardi}$$

$$10^{14} = 100.000.000.000.000 = \text{centinaia di biliardi}$$

In questa tabella si può notare che l'esponente ci indica quanti sono gli zeri da posizionare alla destra di 1.

Possiamo notare che 10^3 è mille, 10^6 è un milione, 10^9 è un miliardo, 10^{12} è un biliardo....

Qualunque numero lo possiamo sempre scomporre nel prodotto di un coefficiente per una potenza di 10.

Questo nuovo tipo di rappresentazione dei numeri viene chiamato “notazione esponenziale” o “notazione scientifica”.

4,37 biliardi sarà perciò scomposto in $4,37 * 1$ biliardo e cioè $4,37 * 10^{12}$.

Il numero è stato perciò scomposto in un COEFFICIENTE per una potenza di dieci. Il secondo fattore è sempre rappresentabile da una potenza di dieci.

mille = 10^3

un milione = 10^6

un miliardo = 10^9

un biliardo = 10^{12}

Tornando al nostro numero iniziale di 4,37 biliardi

$$\begin{aligned} 4,37 \text{ biliardi} &= 4,37 * 10^{12} \\ &= 4.370 * 10^9 \\ &= 4.370.000 * 10^6 \\ &= 0,00437 * 10^{15} \\ &= 0,00000437 * 10^{18} \end{aligned}$$

Come si può notare abbiamo rappresentato lo stesso numero andando a giocare con la posizione della virgola.

Tutte le scomposizioni prese in considerazione rappresentano sempre lo stesso valore.

Da tutto questo possiamo ricavare che:

- 1) Se si sposta la virgola verso destra si diminuisce l'esponente del 10 di una unità per ogni posto di virgola cambiato.
- 2) Se si sposta la virgola verso sinistra si aumenta di una unità l'esponente del 10 per ogni posto di virgola cambiato.

Vediamo ora come le potenze di 10 possono rappresentare il mondo dell'infinitamente piccolo.

Un settore della scienza che si sta evolvendo con estrema rapidità è il settore dei bio e nano materiali.

Si stanno ricavando materiali di dimensioni piccolissime a livello atomico o molecolare. L'unità di misura è il miliardesimo di metro.

Anche queste grandezze sono rappresentabili attraverso la notazione scientifica o la notazione esponenziale.

Questa volta le potenze di 10 le dobbiamo osservare da un punto di vista diverso e considerare gli esponenti negativi

$$10^0 = 1/1 = \text{unità}$$

$$10^{-1} = 1/10 = 0,1$$

$$10^{-2} = 1/100 = 0,01$$

$$10^{-3} = 1/1.000 = 0,001$$

$$10^{-4} = 1/10.000 = 0,0001$$

$$10^{-5} = 1/100.000 = 0,00001$$

$$10^{-6} = 1/1000.000 = 0,000001$$

$$10^{-7} = 1/10.000.000 = 0,0000001$$

$$10^{-8} = 1/100.000.000 = 0,00000001$$

$$10^{-9} = 1/1.000.000.000 = 0,000000001$$

$$10^{-10} = 1/10.000.000.000 = 0,0000000001$$

$$10^{-11} = 1/100.000.000.000 = 0,00000000001$$

$$10^{-12} = 1/1.000.000.000.000 = 0,000000000001$$

$$10^{-13} = 1/10.000.000.000.000 = 0,0000000000001$$

$$10^{-14} = 1/100.000.000.000.000 = 0,00000000000001$$

$$10^{-15} = 1/1.000.000.000.000.000 = 0,000000000000001$$

$$10^{-16} = 1/10.000.000.000.000.000 = 0,0000000000000001$$

$$10^{-17} = 1/100.000.000.000.000.000 = 0,00000000000000001$$

È da tener presente che il segno dell'esponente non ha nulla a che fare con il segno algebrico della potenza.

Come si può notare tutti i valori considerati sono positivi e si vede che l'esponente indica ancora il numero di zeri che compaiono complessivamente nel valore decimale.

Questa volta gli zeri sono scritti alla sinistra del numero 1 e dopo il primo zero c'è sempre la virgola.

Il segno negativo dell'esponente indica solamente che gli zeri sono tutti posizionati a sinistra del numero 1 e dopo il primo zero abbiamo la virgola.

Il segno - dell'esponente indica solamente che gli zeri sono posizionati a sinistra (come i numeri negativi sull'asse delle X nel piano cartesiano).

Per quanto riguarda lo spostamento della virgola vale ancora quanto abbiamo già visto prima.

$$\begin{aligned} 0,00000035 &= 35 * 10^{-8} & 0,0035 &= 35 * 10^{-4} \\ &= 3,5 * 10^{-3} \\ &= 0,35 * 10^{-2} \\ &= 0,035 * 10^{-1} \\ &= 0,0035 * 10^0 = 0,00035 * 10^1 \end{aligned}$$

$$= 0,000035 * 10^2$$

$$= 0,0000035 * 10^3 = 0,00000035 * 10^4$$

Grazie a questa considerazione possiamo rappresentare le grandezze fisiche che indicano i sottomultipli del metro

1m	=1*10 ⁰ m	=1m	
0,1m	=1*10 ⁻¹ m	= 1dm	
0,01m	=1*10 ⁻² m	= 1cm	
0,001m	=1*10 ⁻³ m	= 1mm	
0,0001m	=1*10 ⁻⁴ m	= 1/10 mm	= 0,1mm
0,00001m	=1*10 ⁻⁵ m	= 1/100mm	= 0,01mm
0,000001m	=1*10 ⁻⁶ m	= 1/1000mm	= 0,001mm
0,0000001m	=1*10 ⁻⁷ m	= 1/10000mm	= 0,0001mm
0,00000001m	=1*10 ⁻⁸ m	= 1/100000mm	= 0,00001mm
0,000000001m	=1*10 ⁻⁹ m	= 1/1000000mm	= 0,000001mm
0,0000000001m	= 1 * 10 ⁻¹⁰ m	= 1/10000000mm	= 0,0000001mm
0,00000000001m	= 1 * 10 ⁻¹¹ m	= 1/100000000mm	= 0,00000001mm
0,000000000001m	= 1 * 10 ⁻¹² m	= 1/1000000000mm	= 0,000000001mm
0,0000000000001m	= 1 * 10 ⁻¹³ m	= 1/10000000000mm	= 0,0000000001mm

$$10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$$

$$10^{-4} \text{ m} = 10^{-1} \text{ mm}$$

$$10^{-5} \text{ m} = 10^{-2} \text{ mm}$$

$$10^{-6} \text{ m} = 10^{-3} \text{ mm} = 1 \mu\text{m} \text{ (micrometro)}$$

$$10^{-7} \text{ m} = 10^{-4} \text{ mm} = 10^{-1} \mu\text{m}$$

$$10^{-8} \text{ m} = 10^{-5} \text{ mm} = 10^{-2} \mu\text{m}$$

$$10^{-9} \text{ m} = 10^{-6} \text{ mm} = 10^{-3} \mu\text{m} = 1 \text{ nm (nanometro)}$$

$$10^{-10} \text{ m} = 10^{-7} \text{ mm} = 10^{-4} \mu\text{m} = 10^{-1} \text{ nm} = 1 \text{ \AA (amstrong)}$$

$$10^{-11} \text{ m} = 10^{-8} \text{ mm} = 10^{-5} \mu\text{m} = 10^{-2} \text{ nm} = 10^{-1} \text{ \AA}$$

$$10^{-12} \text{ m} = 10^{-9} \text{ mm} = 10^{-6} \mu\text{m} = 10^{-4} \text{ nm} = 10^{-3} \text{ \AA} = 1 \text{ pm (picometro)}$$

$$10^{-13} \text{ m} = 10^{-10} \text{ mm} = 10^{-7} \mu\text{m} = 10^{-3} \text{ nm} = 10^{-2} \text{ \AA} = 10^{-1} \text{ pm}$$

$$10^{-14} \text{ m} = 10^{-11} \text{ mm} = 10^{-8} \mu\text{m} = 10^{-4} \text{ nm} = 10^{-3} \text{ \AA} = 10^{-2} \text{ pm}$$

$$10^{-15} \text{ m} = 10^{-12} \text{ mm} = 10^{-9} \mu\text{m} = 10^{-5} \text{ nm} = 10^{-4} \text{ \AA} = 10^{-3} \text{ pm} = 1 \text{ fm (femtometro)}$$

$$10^{-16} \text{ m} = 10^{-13} \text{ mm} = 10^{-10} \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ nm} = 10^{-5} \text{ \AA} = 10^{-4} \text{ pm} = 10^{-1} \text{ fm}$$

$$10^{-17}\text{m}=10^{-14}\text{mm}=10^{-11}\mu\text{m}=10^{-7}\text{nm}=10^{-6}\text{A}=10^{-5}\text{pm}=10^{-2}\text{fm}$$

$$10^{-18}\text{m}=10^{-15}\text{mm}=10^{-12}\mu\text{m}=10^{-8}\text{nm}=10^{-7}\text{A}=10^{-6}\text{pm}=10^{-3}\text{fm}=1\text{ am (attometro)}$$

Possiamo riassumere tutti i prefissi legati ai sottomultipli con la tabella inserita di seguito.

Exp	Prefisso	Simbolo	Valore
10^{-1}	deci-	d-	0,1
10^{-2}	centi-	c-	0,01
10^{-3}	milli-	m-	0,001
10^{-6}	micro-	μ -	0,000 001
10^{-9}	nano-	n-	0,000 000 001
10^{-12}	pico-	p-	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto-	f-	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto-	a-	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	zepto-	z-	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	yopto-	y-	0,000 000 000 000 000 000 000 001

Analogamente possiamo definire tutti i multipli del metro.

$$1\text{m}=1\cdot 10^0\text{ m}=1\text{m}$$

$$10\text{ m}=1\cdot 10^1\text{ m}=1\text{dam}=1\text{ decametro}$$

$$100\text{ m}=1\cdot 10^2\text{ m}=1\text{hm}=1\text{ hectometro}$$

$$1000\text{ m}=1\cdot 10^3\text{ m}=1\text{km}=1\text{ kilometro}$$

$$10.000\text{ m}=1\cdot 10^4\text{ m}=10^1\text{km}$$

$$100.000\text{ m}=1\cdot 10^5\text{ m}=10^2\text{km}$$

$$1.000.000\text{ m}=1\cdot 10^6\text{ m}=10^3\text{km}=1\text{Mm (Megametro)}$$

$$10.000.000\text{ m}=1\cdot 10^7\text{ m}=10^4\text{km}=10^1\text{ Mm}$$

$$100.000.000\text{ m}=1\cdot 10^8\text{ m}=10^5\text{km}=10^2\text{ Mm}$$

$$1000.000.000\text{ m}=1\cdot 10^9\text{ m}=10^6\text{km}=10^3\text{ Mm}=1\text{ Gm (Gigametro)}$$

$$10.000.000.000\text{ m}=1\cdot 10^{10}\text{ m}=10^7\text{km}=10^4\text{ Mm}=10^1\text{ Gm}$$

$$100.000.000.000\text{ m}=1\cdot 10^{11}\text{ m}=10^8\text{km}=10^5\text{ Mm}=10^2\text{ Gm}$$

$$1000.000.000.000\text{ m}=1\cdot 10^{12}\text{ m}=10^9\text{km}=10^6\text{ Mm}=10^3\text{ Gm}=1\text{ Tm (Terametro)}$$

$10.000.000.000.000 \text{ m} = 1 \cdot 10^{13} \text{ m} = 10^{10} \text{ km} = 10^7 \text{ Mm} = 10^4 \text{ Gm} = 10^1 \text{ Tm}$
 $100.000.000.000.000 \text{ m} = 1 \cdot 10^{14} \text{ m} = 10^{10} \text{ km} = 10^8 \text{ Mm} = 10^5 \text{ Gm} = 10^2 \text{ Tm}$
 $1.000.000.000.000.000 \text{ m} = 1 \cdot 10^{15} \text{ m} = 10^{11} \text{ km} = 10^9 \text{ Mm} = 10^6 \text{ Gm} = 10^3 \text{ Tm}$

Possiamo riassumere tutti i prefissi legati ai multipli con la tabella inserita di seguito.

yotta	Y	10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000 000
zetta	Z	10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000 000
exa	E	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000 000
peta	P	10^{15}	1 000 000 000 000 000
tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000
giga	G	10^9	1 000 000 000
mega	M	10^6	1 000 000
kilo	k	10^3	1 000
hecto	h	10^2	100
deca	da	10^1	10

Nelle classificazioni in passato venivano indicati sia il Miriametro (10 km) sia il Miriagrammo (10 kg). Ovviamente ora non si usano più in quanto il loro simbolo porterebbe a confusione.

Mm indica Megametro (1000 km) e Mg indica il Megagrammo (1000 kg).

Con l'avvento degli apparati tecnologici e la diffusione di strumenti informatici come smartphone, tablet, laptop, e pc, siamo entrati in confidenza con i prefissi Mega, Giga e Tera.

Questi termini, diventati comuni nel linguaggio di tutti i giorni, altro non sono che l'espressione di potenze di 10 come abbiamo visto sopra (10^6 , 10^9 , 10^{12}). Imparare a lavorare con le potenze di 10 risulta essere ormai una necessità.

Quando si studia la Geologia, la geografia, la Storia, l'Astronomia, la Fisica o la Chimica, siamo costretti ad utilizzare la notazione scientifica.

Questa nuova visione deve diventare il nostro comune modo di operare nell'interpretazione della realtà che ci circonda.

APPLICAZIONI DELLA NOTAZIONE SCIENTIFICA NEL CALCOLO DELLE ESPRESSIONI

Abbiamo visto come per rappresentare i numeri molto grandi e i numeri molto piccoli, sia molto efficace e comodo operare con la notazione scientifica.

Vediamo ora come, fruttando alcune proprietà della moltiplicazione (proprietà associativa e commutativa) possiamo gestire il calcolo con grandi numeri anche nelle comuni espressioni.

Consideriamo il seguente esempio:

$$250.000 * 90.000 =$$

Possiamo scomporre la nostra moltiplicazione nel prodotto dei seguenti fattori: $25 * 10.000 * 9 * 10.000 =$

Questo altro non è che lo sviluppo dei numeri in notazione scientifica: $25 * 10^4 * 9 * 10^4 =$ usando le proprietà della moltiplicazione potremo riscriverla nel seguente modo:

$$25 * 9 * 10^4 * 10^4 =$$

che corrisponde a :

$$5^2 * 3^2 * 10^4 * 10^4 =$$

$$(5^2 * 3^2) * (10^4 * 10^4) =$$

applichiamo le proprietà delle potenze e risolviamo il calcolo con numeri "facili": $(5 * 3)^2 * 10^{(4+4)} = 15^2 * 10^8 = 225 * 100.000.000. = 22.500.000.000$

Il risultato sarà perciò ventidue miliardi e cinquecento milioni.

ORDINE DI GRANDEZZA

Spesso si sente parlare di Ordine di Grandezza di un numero. Definiamo bene questo concetto .

Si definisce **Ordine di Grandezza** la potenza di 10 che più si avvicina al numero considerato.

Ovviamente questa potenza di 10 potrà essere un' approssimazione del numero per eccesso o per difetto.

Come primo esempio consideriamo il numero 87 e lo scriviamo in notazione scientifica: $87 = 8,7 * 10^1$

87 è maggiore di 10 e minore di 100 e questo lo possiamo scrivere, usando i simboli matematici, nel seguente modo:

$10 < 87 < 100$ che si potrà anche indicare come $10^1 < 87 < 10^2$.

È facile capire che 87 è più vicino a 100 che non a 10.

L'Ordine di Grandezza sarà perciò 10^2 .

Consideriamo ora un altro esempio prendendo in considerazione la distanza esistente tra la Terra e la Luna che è di 380.000.000 m.

Scriviamolo in notazione scientifica:

$$380.000.000 \text{ m} = 3,8 * 10^8 \text{ m.}$$

Le potenze di 10 da prendere in considerazione saranno perciò 10^8 e 10^9 infatti:

$$10^8 < 3,8 * 10^8 < 10^9$$

La distanza Terra Luna è compresa tra 10^8 e 10^9 m.

Siccome il valore 3,8 è minore di 5, la distanza sarà più vicina a 10^8

L'Ordine di Grandezza sarà perciò 10^8 m.

Facciamo un altro esempio considerando la lunghezza del "raggio equatoriale" della Terra che è di 6.378.160 m.

La scrittura in notazione esponenziale sarà $6,37816 * 10^6 \text{ m} = 6,4 * 10^6 \text{ m}$ (valore approssimato per eccesso).

Le potenze di 10 che più si avvicinano a questo numero saranno 10^6 e 10^7 . Si avrà:
 $10^6 < 6,4 * 10^6 < 10^7$.

La potenza più vicina sarà 10^7 perché 6,4 è maggiore di 5.

L'Ordine di Grandezza del raggio equatoriale della terrestre sarà perciò 10^7 m.