MADD-SPOT, **3**, 2017

Madd-Spot
La serie speciale di articoli divulgativi di Maddmaths!

Web site
http://maddmaths.simai.eu/

IL TRASPORTO RAMIFICATO: UNO... SCONTO COMITIVA

DI ANNALISA MASSACCESI

Un ampio ramo della matematica – il *trasporto ottimo* – si occupa di ottimizzazione nel caso di trasporto di un materiale. Due sono gli esempi classici: lo spostamento della sabbia da una cava ad un cantiere e la distribuzione del pane dai forni ai negozi, al mattino. Il modello matematico si basa su un dato *costo* del trasporto, solitamente dipendente almeno dalla distanza da far percorrere alla merce, e sulla disponibilità di una miriade di *possibili percorsi*, tra i quali vorremmo selezionare il percorso (o, perché no?, i percorsi) che minimizza(no) il costo. Il *trasporto ramificato* si concentra su dei costi particolari, ma verosimili, che favoriscono l'aggregazione della merce per lunghi tratti di strada. Una specie di sconto comitiva!

Analizziamo il meccanismo di calcolo del costo di un trasporto per capirne di più! Possiamo schematizzare l'insieme delle sorgenti del materiale con dei punti azzurri. Per semplicità, nella figura qui sotto supponiamo ci sia una sola sorgente: in questo caso potremmo dire che si tratta di un problema di irrigazione, anzi potremmo proprio immaginare di voler trasportare dell'acqua. Il materiale è destinato ai punti rossi, i pozzi; ancora una volta per semplicità, nella figura supponiamo di voler portare in ciascun pozzo la stessa quantità di acqua. Un percorso ammissibile è una rete che connette la sorgente con i pozzi in modo da non disperdere materiale (né tantomeno crearne dal nulla!).

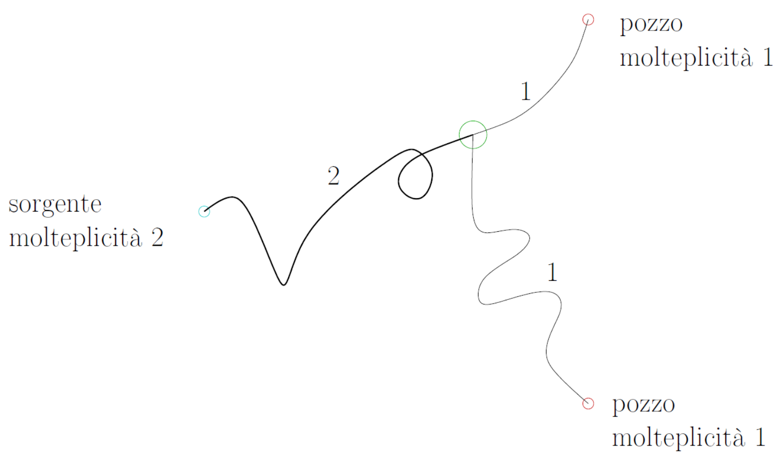

Figura 1: Un facile esempio di percorso ammissibile.

Il percorso può essere spezzato in tre parti: nella prima parte, quella che va dalla sorgente al *punto di ramificazione* cerchiato in verde, viene trasportata una quantità d'acqua doppia rispetto alle altre due. Quindi il costo del trasporto sarà la somma delle lunghezze delle parti pesate con una funzione della molteplicità, cioè la portata del tubo, se stiamo ancora pensando all'acqua. Proprio l'acqua ci offre uno spunto interessante: raddoppiando la portata di un tubo, la sua superficie laterale aumenta soltanto di un fattore $\sqrt{2}$, perché la formula dell'area della sezione del tubo ha un raggio al quadrato, mentre quella del perimetro il raggio soltanto. Quindi è ragionevole pensare che il costo del tubo sia un multiplo della radice quadrata della portata... Ecco spiegati i costi che favoriscono l'aggregazione! Costi concavi, come la funzione $x \mapsto \sqrt{x}$, per essere più precisi. È chiaro che, se far viaggiare insieme il materiale è più economico che farne viaggiare altrettanto su percorsi indipendenti, allora spesso ci conviene creare queste strutture ramificate.

Quello che otteniamo è una spiegazione matematica di un fenomeno che abbiamo sotto gli occhi ogni giorno: non si tratta soltanto di capire perché le reti stradali o quelle di distribuzione dei servizi e dei beni commerciali funzionino in un certo modo (le comunicazioni, la rete elettrica, la rete idrica, i gasdotti, il sistema fognario, solo per citarne alcuni), anche la natura ci offre esempi di stravagante bellezza. Tra gli esempi più noti, si può pensare alla struttura delle foglie e delle radici delle piante, alle alghe, ma anche al sistema nervoso, al sistema respiratorio o a quello cardiovascolare. In questi ultimi casi, non si tratta soltanto di risparmio energetico, perché i vasi più grandi offrono anche maggiore protezione dagli agenti patogeni.

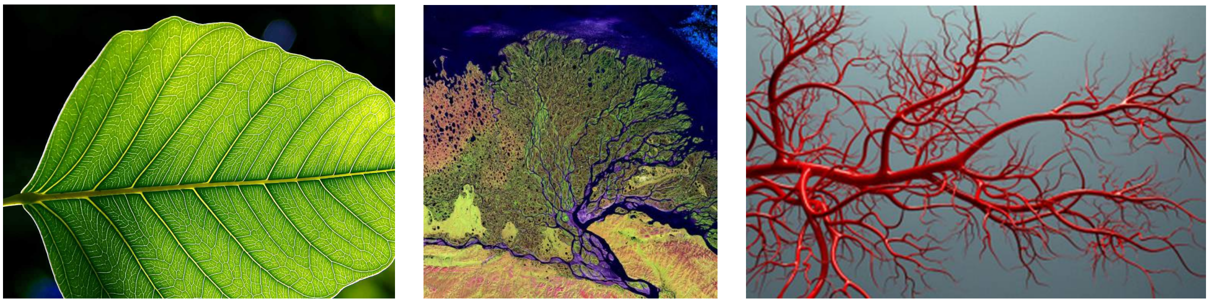

Figura 2: I vasi linfatici in una foglia (sinistra, ©Jon Sullivan (PD Photo.org)), il delta del fiume Lena (centro, ©NASA), una ricostruzione 3D dei vasi sanguigni (destra, ©iStock Vanderbilt University).

La comprensione matematica del problema del trasporto ramificato si può spingere a diversi livelli di profondità. Innanzitutto, la presenza di una quantità pantagruelica di percorsi ammissibili non rende banale l'esistenza di un percorso che minimizzi il costo. Come al solito, l'estremo inferiore di un insieme di numeri reali esiste sempre, per il minimo serve un po' più di fortuna... Ad esempio, si può dimostrare che, se il costo è "troppo" concavo, allora non è possibile irrigare con costo finito una porzione di superficie bidimensionale, come un quadrato, a partire da una sola sorgente. D'altro canto, se i pozzi sono un numero finito di punti, un trasporto minimo esiste sempre.

Un'altra questione solitamente interessante è quella dell'unicità del minimo, ma è facile pensare a degli esempi in cui il minimo non è affatto unico. Nella figura 3 sia il percorso continuo che quello tratteggiato sono non soltanto ammissibili, ma minimi del problema di irrigazione dalla sorgente in azzurro ai tre pozzi in rosso, tutti allineati a destra.

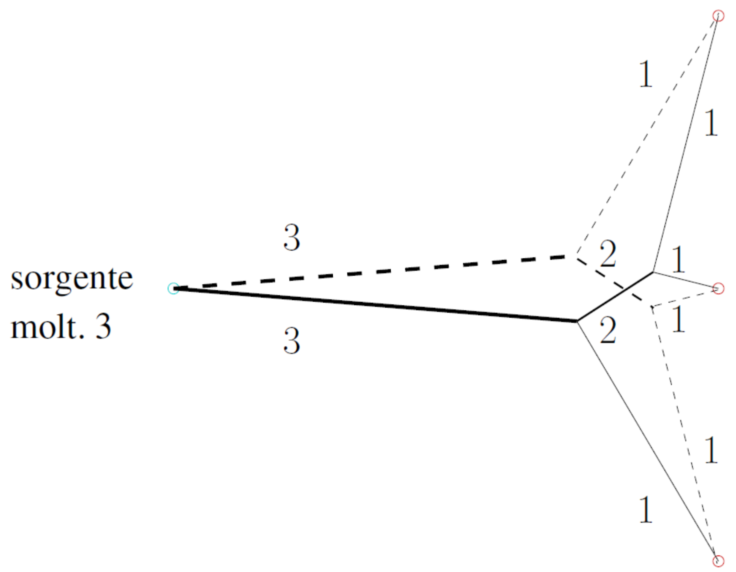

Figura 3: Un esempio di non unicità del minimo, con un costo che è la radice quadrata della molteplicità.

L'obiettivo più ambizioso sarebbe poi quello di conoscere in modo esplicito, attraverso un opportuno algoritmo, quale sia il trasporto ottimo di un problema dato. Purtroppo algoritmi del genere esistono soltanto in alcuni casi particolari, come quello di un numero finito di sorgenti e pozzi, oltretutto puntuali, e hanno comunque un grado di complessità molto elevato (NP), che si ripercuote sui tempi di calcolo. Ridimensionando i nostri scopi, possiamo occuparci della cosiddetta regolarità del minimo, ossia un elenco di proprietà comuni a tutti i minimi che ci permetteranno comunque di descriverli ed utilizzarli meglio.

La prima osservazione, facile ma preziosa, è che il trasporto ottimo deve essere un grafo formato da segmenti, perché questi minimizzano la lunghezza della curva tra due punti. Inoltre, si può escludere la presenza di cicli, che sicuramente aumenterebbero il costo in questione. Nella figura 1, ad esempio, il costo può essere drasticamente diminuito considerando la modifica riportata in figura 4.

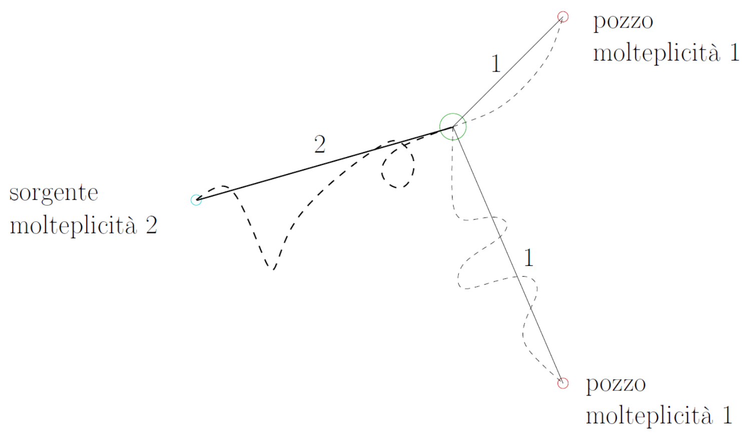

Figura 4: Miglioramento del trasporto nella Figura 1.

Il problema si riduce quindi a due altri problemi, in ordine decrescente di difficoltà: scegliere la struttura del grafo (quanti punti di ramificazione, con quali molteplicità) e posizionare in modo appropriato i punti di ramificazione. Nel caso in cui la struttura del grafo sia facile, come ad esempio nel caso dell'irrigazione di due pozzi, in cui si ha una soluzione a forma di Y, è anche facile localizzare il miglior punto di ramificazione. Per curiosità, l'angolo formato dai due rami uscenti, nel caso del costo $x \mapsto \sqrt{x}$, è esattamente di $\pi/2$.

All'inizio ho introdotto il trasporto ottimo come problema di ottimizzazione per il trasporto di un materiale. Nulla – se non la maggiore complessità del modello matematico – ci impedisce di provare ad ottimizzare il trasporto di più materiali insieme. Questo modello è indispensabile quando si parla, ad esempio, di reti stradali promiscue, o di trasporto misto di merci e persone. L'esempio più pregnante è però quello della tecnologia PLC (*power line communications*), in cui si sfrutta la rete elettrica per la trasmissione di dati (internet a banda larga, per esempio). In questo caso di trasporto multimateriale, il modello matematico prende in considerazione una molteplicità che non è più un semplice numero reale, ma un vettore, le cui componenti corrispondono ciascuna alla molteplicità di un singolo materiale. Il costo è perciò una funzione di più variabili, tante quante sono i materiali in analisi.

PER APPROFONDIRE:

C. Villani.
Optimal transport. Old and new.
Springer-Verlag, Berlin, 2009.

F. Santambrogio.
Optimal transport for applied mathematicians.
Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

M. Bernot, V. Caselles, J.-M. Morel.
Optimal transportation networks, models and theory.
Springer-Verlag, Berlin, 2009.

A. Marchese, A. Massaccesi, R. Tione.
Multimaterial transport problem.
In preparazione.

SULL'AUTRICE:

Annalisa Massaccesi è assegnista di ricerca presso l'Università di Verona, finanziata dalla Marie Skłodowska–Curie fellowship CuMiN (Currents and Minimizing Networks, n. 752018) del programma Horizon 2020 dell'Unione Europea. Si occupa principalmente di teoria geometrica della misura, con un interesse particolare all'impiego dei suoi strumenti per problemi di ottimizzazione di reti.
E-mail: `annalisa.massaccesi@math.uzh.ch`