

---

## MATEMATICA PER GLI SMART MATERIALS

DI ELENA BONETTI

---

“La misura dell’intelligenza è data dalla capacità di cambiare quando è necessario”  
(Einstein)

Anche quando si parla di intelligenza per materiali inanimati si fa di fatto riferimento alla capacità degli stessi di attivare “processi di cambiamento”, come necessaria conseguenza a stimoli esterni a cui sono sottoposti. Negli ultimi anni lo sviluppo tecnologico di materiali “smart” è stato uno degli ambiti di maggior interesse scientifico e tecnologico, conseguente ad un sempre più diffuso utilizzo di tali materiali in settori estremamente innovativi, che vanno dalla medicina, all’ingegneria civile, alla microelettronica, all’architettura. Una importante spinta alla conoscenza delle proprietà di tali materiali, e conseguentemente al loro utilizzo tecnologico, si ha avuta grazie alla formulazione di modelli matematici, capaci di descriverne non solo le proprietà meccaniche e fisiche, ma il comportamento “intelligente”.

Ma partiamo dall’inizio e proviamo a chiarire cosa significhi essere “smart”, almeno per un materiale. Si caratterizzano come *smart materials* quei materiali che sono in grado di reagire a stimoli dell’ambiente esterno modificando le proprie proprietà e/o configurazioni. A questo processo di “adattamento” all’ambiente (ad esempio alle sollecitazioni termiche, magnetiche, etc.) consegue la capacità degli stessi materiali di reagire ad input di forze in modo differente a seconda dello stato in cui si trovano. Tra questi materiali, negli ultimi anni, hanno giocato un ruolo significativo i cosiddetti “materiali a memoria di forma”: materiali (leghe metalliche o polimeri) che possono recuperare la forma originale, dopo aver subito una deformazione permanente, attraverso sollecitazioni di natura termica. In particolare, grande interesse hanno suscitato le leghe a memoria di forma. Le loro applicazioni sono innumerevoli e sempre più diffuse: in area biomedica (endoprotesi, apparecchi ortodontici, stent cardiovascolari), nella robotica, nelle applicazioni industriali, nell’ingegneria civile (anche con rilevanti applicazioni antisismiche). Per i polimeri semi-cristallini la memoria di forma si manifesta come termo-retrazione e ha, oltre agli ambiti già detti, una applicazione nella diffusa tecnologia del “packaging”. Anche per i polimeri si aprono nuovi scenari per il futuro. Tra questi ricordiamo la promettente tecnologia della stampante 4D: una stampante 3D che, utilizzando materiali polimerici a

memoria di forma, permette di costruire, ad esempio, oggetti “self-adjustable”, grazie proprio all’attivazione della memoria di forma.

Il fenomeno della memoria di forma è sostanzialmente ascrivibile al fatto che le configurazioni microscopiche del materiale (la struttura cristallografica nelle leghe metalliche o gli orientamenti delle catene nei polimeri semi-cristallini) dipendono dalla temperatura in cui si trova il corpo, oltre che da forze applicate di natura meccanica. A diverse configurazioni corrispondono poi diversi regimi di elasticità o plasticità del materiale stesso. Per le leghe metalliche le proprietà di memoria di forma sono la conseguenza di una trasformazione a livello della struttura microscopica tra una configurazione altamente simmetrica (*austenite*) presente ad alte temperature e una configurazione meno simmetrica (*martensite*) presente a regimi più bassi di temperatura. Nel caso in cui questa trasformazione sia effetto solamente di azioni termiche, la fase martensitica si presenta in una configurazione “gemellata”. Applicando sforzi meccanici si arriva ad una singola variante di martensite, che attribuisce al materiale un comportamento più tipicamente plastico (scaricando lo stesso rimane una deformazione residua, che può essere recuperata grazie ad un aumento della temperatura).

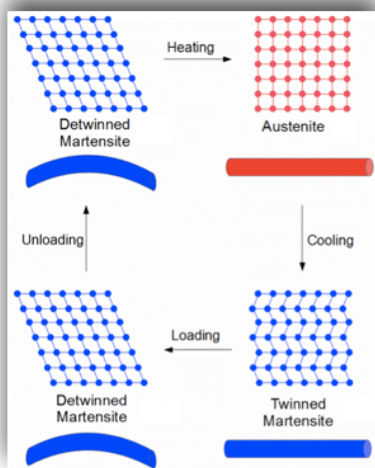


Figura 1: Trasformazione tra la configurazione dell’austenite e le due varianti di martensite per sollecitazioni meccaniche e termiche.

Nel caso dei polimeri semi-cristallini, invece, la memoria di forma si manifesta come la capacità del materiale di ritornare alla forma originaria, dopo aver subito una deformazione permanente, quando raggiunge la temperatura a cui tale deformazione era avvenuta.

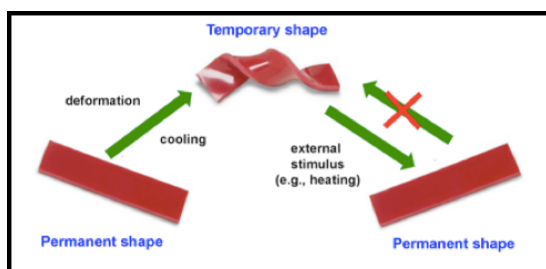


Figura 2: Comportamento della memoria di forma in un polimero.

In entrambe le situazioni si tratta di modellizzare un fenomeno che coinvolge due scale diverse: il livello *microscopico* del cambiamento della configurazione

del materiale e il livello *macroscopico* delle proprietà del materiale che vengono modificate. Per descrivere questi fenomeni attraverso un modello matematico è importante innanzitutto stabilire quale scala di descrizione si vuole utilizzare. Da un lato, infatti, se un approccio di descrizione microscopica può certamente essere un punto di vista utile per cogliere in modo esaustivo tutte le dinamiche coinvolte, dall'altro, per applicazioni in ambito ingegneristico e tecnologico, questo approccio può risultare troppo complesso da un punto di vista dei dati che si devono reperire per validarlo o troppo costoso da un punto di vista computazionale. Al contrario, un approccio prettamente macroscopico, che non riesca a tenere conto delle modifiche strutturali microscopiche del materiale, non può essere adottato per fornire modelli evolutivi e predittivi, ma solo modelli costitutivi che descrivano le relazioni tra le quantità ingegneristiche osservate “stato per stato”.

Al fine di fornire modelli macroscopici che tengano conto delle modifiche delle proprietà del materiale grazie a cambiamenti di configurazioni microscopiche, un approccio efficace è quello delle cosiddette “transizioni di fase”. L'idea nasce dall'applicare un approccio modellistico inizialmente sviluppato in letteratura per le formulazioni “deboli” di problemi di frontiera libera, come il problema di Stefan introdotto per descrivere una transizione di stato del tipo “solido-liquido”. In questo contesto, si introducono uno (o più) parametri di fase che, punto per punto, assumano un valore che corrisponda alla proporzione volumetrica di una fase rispetto ad un'altra. La proporzione viene calcolata rispetto ad un volume microscopico. In questo senso il parametro di fase deve assumere valori compresi tra 0 ed 1, ad esempio, facendo corrispondere a 0 e 1 la presenza pura di una delle due fasi (solida o liquida) e a valori intermedi una compresenza delle due (la cosiddetta “mushy region”).

I modelli che ne sono discesi, nell'ambito di sistemi di equazioni alle derivate parziali, accoppiano tipicamente un'equazione che descrive l'evoluzione della temperatura e un'equazione che descrive l'evoluzione del parametro di fase, cioè la presenza della fase 0 o 1 nel dominio considerato.

Il fatto di avere un sistema di equazioni alle derivate parziali evolutive permette di offrire un modello che può essere implementato numericamente e capace di descrivere il comportamento del materiale, includendo la complessità delle forze coinvolte (di natura termica o meccanica) e delle loro reciproche interazioni. Ne consegue la possibilità di avere risultati predittivi utili per le applicazioni e confrontabili con i dati sperimentali raccolti. In particolare la struttura di questo tipo di modelli, che si basano su un numero ridotto di equazioni evolutive e di incognite, è compatibile con un processo di calibrazione degli stessi sufficientemente semplice, in quanto i parametri coinvolti si ricavano attraverso interpretazioni fisiche confrontabili con le misure sperimentali.

---

#### PER APPROFONDIRE:

F. Auricchio, E. Bonetti, G. Scalet, F. Ubertini.

*Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multi phase transformations and martensite reorientation.*

International Journal of Plasticity, 59 (2014), 30–54.

[leggi articolo](#)

G. Scalet, F. Auricchio, E. Bonetti, L. Castellani, D. Ferri, M. Pachera, F. Scavello.  
*An experimental, theoretical and numerical investigation of shape memory polymers.*  
International Journal of Plasticity, 67 (2015), 127–147.  
[leggi articolo](#)

---

#### SULL'AUTRICE:

Elena Bonetti è Professore Associato presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Milano. Si occupa di equazioni a derivate parziali con applicazioni a problemi di transizione di fase e fenomeni termo-meccanici.  
E-mail: [elena.bonetti@unimi.it](mailto:elena.bonetti@unimi.it)