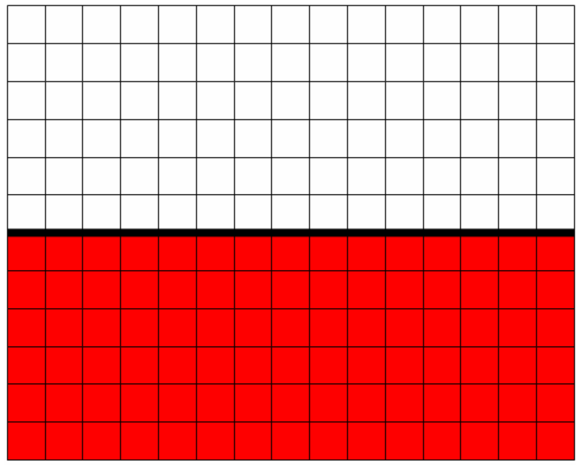
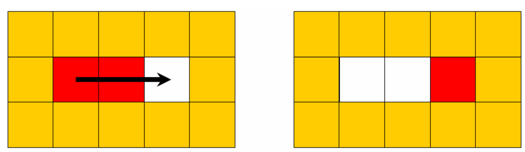
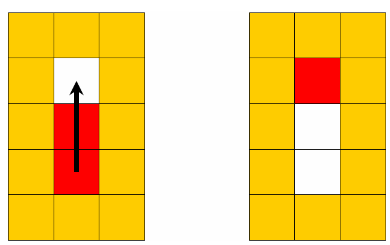
Immaginiamo di avere un quadrettato che prosegue all'infinito in ogni direzione, con le caselle che possono essere colorate (un archaea) o bianche (terreno vuoto). Scelta una riga, che chiamiamo *orizzonte,* poniamo un archaea in ogni casella *sotto* l'orizzonte, nessun archaea *sopra* l'orizzonte:



Gli archaea tentano di prevalere uno sull'altro, uccidono, muoiono, per accaparrarsi il posto più lontano possibile dall'orizzonte; avanzano uccidendo un vicino in orizzontale o in verticale, scavalcandolo e ponendosi davanti, così (le caselle in giallo possono essere piene o vuote)

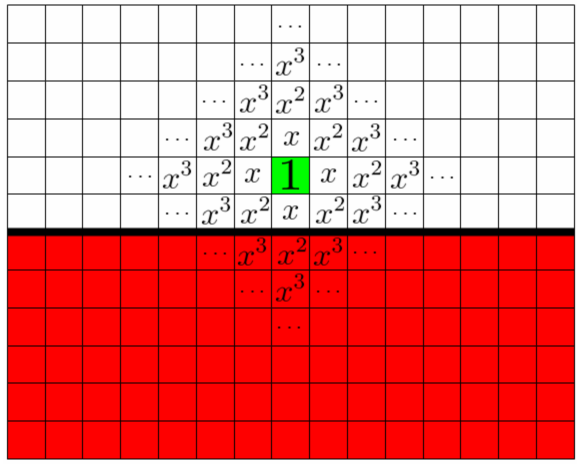


o così:

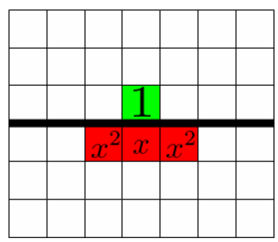


Che la lotta abbia inizio! Quale sarà la massima distanza dall'orizzonte che riusciranno a raggiungere?

Chiamiamo *traguardo* la cella da raggiungere e indichiamolo con $x^0 = 1$. Tutti gli altri quadretti (occupati o meno) siano indicati con x^n , dove n è il numero di caselle di distanza dal traguardo, muovendosi solo orizzontalmente e verticalmente.



In questo modo possiamo assegnare un punteggio, che indicheremo con P, ad ogni configurazione di archaea iniziale, calcolando la somma dei valori presenti nelle celle occupate.

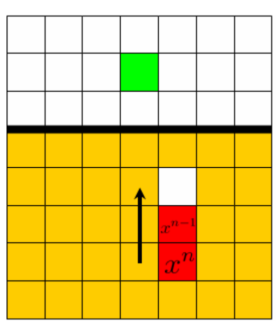


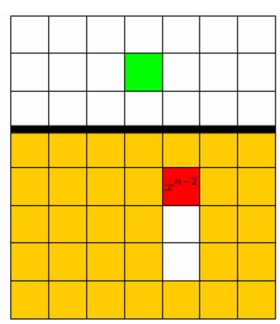
In questo caso il punteggio è $2x^2 + x$

Il punteggio P può essere visto come *l'energia del sistema* e studiando la sua variazione con il passare del tempo si potrà capire il futuro del gioco.

Quando un archaea, che immaginiamo essere sulla casella x^n, salta su un suo vicino, ci sono tre casi da considerare:

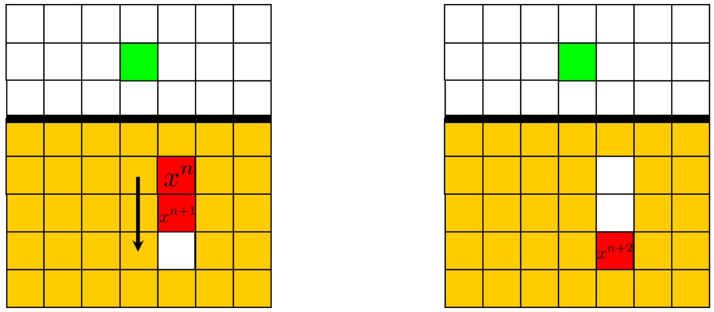
1. Salto *verso* il traguardo.





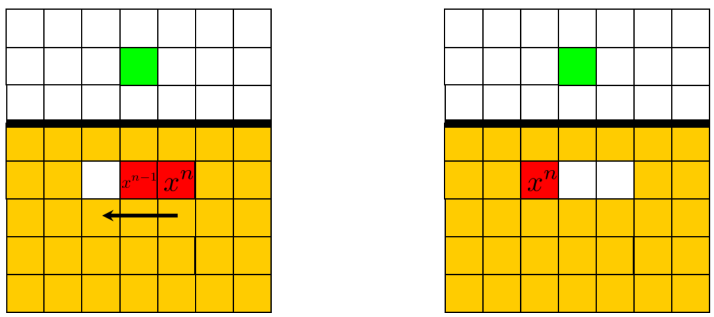
Gli archaea coinvolti prima del salto si trovano nelle caselle rosse e contribuiscono ad un punteggio di $x^{n-1} + x^n$; dopo il salto ne rimane solo uno su x^{n-2}. Il punteggio quindi cambia di $x^{n-2} - (x^{n-1} + x^n) = x^{n-2}(1 - x - x^2)$ (punteggio finale *meno* punteggio iniziale);

2. Salto *allontanandosi* dal traguardo.



Gli archaea coinvolti prima del salto si trovano nelle caselle rosse e contribuiscono ad un punteggio di $x^n + x^{n+1}$; dopo il salto ne rimane solo uno su x^{n+2}. Il punteggio quindi cambia di $x^{n+2} - (x^{n+1} + x^n) = x^n (x^2 - x - 1)$;

3. Salto *lasciando invariata la propria distanza* rispetto al traguardo.



Gli archaea coinvolti prima del salto si trovano nelle caselle rosse e contribuiscono ad un punteggio di $x^n + x^{n-1}$; dopo il salto ne rimane solo uno su x^n. Il punteggio quindi cambia di $x^n - (x^{n-1} + x^n) = -x^{n-1}$.

Possiamo trovare un valore di x che semplifichi i conti imponendo che il punteggio dopo un salto *verso* il traguardo resti invariato; poniamo quindi il cambiamento di punteggio del primo salto uguale a 0, ossia

$$\left(1 - x - x^2\right) = 0, \tag{1}$$

che dà come soluzioni

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

Scegliamo la prima, non negativa e minore di uno (proprietà utile nel seguito), che indichiamo con $\varphi = 0,6180339887\ldots$ (Per i più attenti, φ non è un numero casuale, è legato alla sezione aurea). Poiché φ verifica l'equazione (1), è vero che

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

quindi $\varphi^2 = 1 - \varphi$ e, in generale, moltiplicando per φ più volte:

$$\varphi^n = \varphi^{n-2} - \varphi^{n-1}. \tag{2}$$

Con questa scelta di x:

- un salto verso il traguardo porta ad un cambiamento del punteggio totale iniziale pari a zero;
- un salto allontanandosi dal traguardo porta ad un cambiamento di $\varphi^2 - \varphi - 1 = -2\varphi < 0$;
- un salto restando invariati rispetto al traguardo porta ad un cambiamento di $-\varphi^{n-1} < 0$.

Il punteggio totale iniziale non può aumentare! Quindi si può raggiungere il traguardo, ossia la configurazione in cui c'è almeno un archaea nella casella segnata con 1, solo se il punteggio iniziale è proprio maggiore di 1, dato che durante il gioco non farà che scendere. Da notare che questa è solamente una condizione *necessaria*, quindi non basta a dimostrare che *esiste* una soluzione, che andrà trovata a mano.

Soluzione Prima di valutare quale sia la distanza massima raggiungibile, scriviamo la somma (infinita) $\varphi^2 + \varphi^3 + \varphi^4 + \ldots$ in maniera più compatta, ovvero come $\sum_{n=2}^{\infty} \varphi^n$, una *serie geometrica*. Si può notare che tale somma infinita dà come risultato 1,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varphi^n = 1; \tag{3}$$

questo si può mostrare, per i più esperti, riconoscendo una serie geometrica di ragione φ *minore di uno* e sfruttando le proprietà di φ:

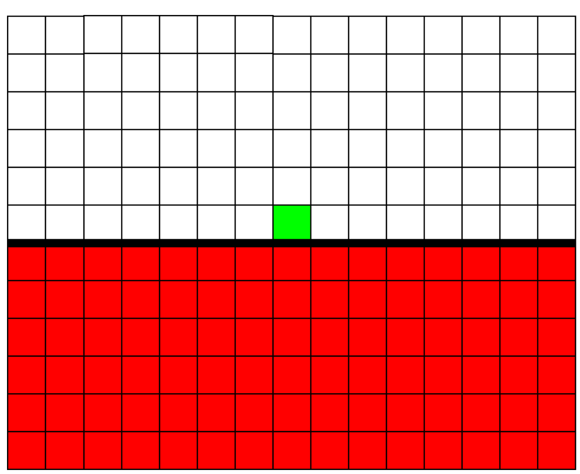
$$\sum_{n=2}^{\infty} \varphi^n = \frac{1}{1-\varphi} - \varphi - 1 = 1.$$

Più intuitivamente, dato che vale (2), si può notare che la serie è *telescopica*, ovvero che quasi tutti i termini si cancellano:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varphi^n = \varphi^2 + \varphi^3 + \ldots = (1-\varphi) + \left(\varphi - \varphi^2\right) + \ldots = 1.$$

Siamo pronti! Poniamo il traguardo in una cella direttamente sopra l'orizzonte e consideriamo la configurazione iniziale con il punteggio più alto, che si ha quando tutte le caselle sotto l'orizzonte sono occupate da archaea. Il punteggio della prima riga *sotto* il traguardo è

$$\varphi + 2\varphi^2 + 2\varphi^3 + \ldots = \varphi + 2\left(\varphi^2 + \varphi^3 + \varphi^4 + \ldots\right).$$



Abbiamo già calcolato la somma fra parentesi, in (3), quindi

$$\varphi + 2\left(\varphi^2 + \varphi^3 + \varphi^4 + \dots\right) = \varphi + 2\sum_{n=2}^{\infty} \varphi^n = \varphi + 2.$$

Per quanto riguarda la somma dei valori nella riga sottostante si ragiona allo stesso modo, perché è lo stesso valore, moltiplicato per φ, ed è così anche per tutte quelle sotto (ogni volta moltiplicato per φ). Quindi la somma totale di tutte le righe è:

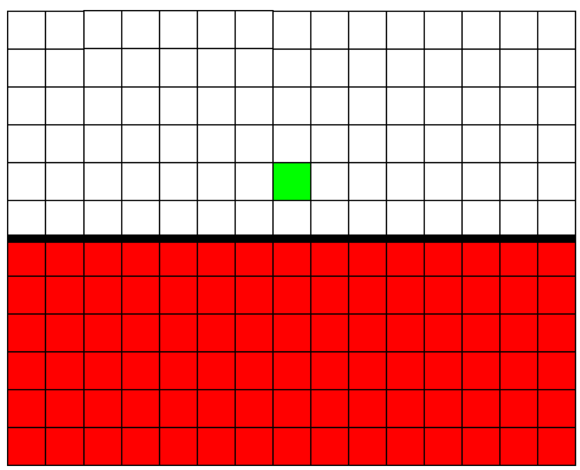
$$\begin{aligned} S_1 &= (\varphi + 2) + \varphi(\varphi + 2) + \varphi^2(\varphi + 2) + \dots \\ &= (\varphi + 2)\left(1 + \varphi + \varphi^2 + \varphi^3 + \dots\right). \end{aligned}$$

Sempre grazie a (3) possiamo semplificare in

$$S_1 = (\varphi + 2)(1 + \varphi + 1) = (\varphi + 2)^2 = 4 + 4\varphi + \varphi^2 = 5 + 3\varphi.$$

Il punteggio iniziale è $5 + 3\varphi$ che è maggiore di 1; la condizione necessaria è soddisfatta, ed è possibile arrivare al traguardo in una sola semplice mossa!

La situazione successiva da considerare è quella del traguardo posto sulla seconda riga.



In questo caso ogni quadrato sotto la riga è distante uno in più dal traguardo di quanto non lo fosse al punto precedente. Il nuovo punteggio si trova quindi moltiplicando il vecchio per φ:

$$S_2 = \varphi(5 + 3\varphi) = 5\varphi + 3\varphi^2 = 5\varphi + 3(1 - \varphi) = 3 + 2\varphi.$$

Anche $3 + 2\varphi$ è maggiore di uno e anche in questo caso la soluzione si può trovare. Ci si comporta equivalentemente con il traguardo in terza riga ottenendo

$$S_3 = 2 + \varphi,$$

e con il traguardo in quarta riga ottenendo

$$S_4 = 1 + \varphi.$$

Tutti sono maggiori di uno e si può trovare la soluzione. Quando però fissiamo il traguardo in quinta riga...

$$S_5 = 1.$$

Uno? Come è possibile arrivare in quinta riga *senza fare mosse che abbassino il punteggio iniziale, che alla fine deve restare proprio* 1*?* Semplice...

...non si può raggiungere!

Per quanto ci si impegni, non ci sono soluzioni che portino gli archaea a più di cinque passi di distanza!

Puoi tornare all'articolo, se vuoi leggere altri enigmi vai al *3*; altrimenti vai al *15*.