P406 ADRIANO BONADONI

Sia $\begin{cases} a_0 = a \\ a_i = P^{(i)}(a_{i-1}) \end{cases}$ la successione di punti

di un'orbita periodica di P, di periodo k, dimostriamo che $k = \cancel{0}\ 1$ oppure $k = 2$ -

Poiché $|n-m| \,/\, P(m) - P(n) \quad m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq n$

si ha che $a_1 - a_0 \,|\, a_2 - a_1 \,|\, a_3 - a_2 \,| \cdots |\, a_k - a_{k-1} \,|\, a - a_{k-1}) \,|\, a_1 - a_0$

quindi $|a_{i+1} - a_i|$ è costante
ma questo è impossibile, perché per $k > 2$
ciò implicherebbe che l'"orbita" non è chiusa.

# *Soluzione problema 406 (Archimede 2/2016) di Giuseppe Fera*

Sia $a$ un punto fisso intero di $P^{(k)}(x)$ con $k$ intero positivo. Dimostreremo il seguente

Teorema: $a$ è un punto fisso di $P^{(2)}(x)$.

La soluzione del problema si ottiene ponendo $k = 2016$.

La dimostrazione del teorema poggia sul seguente:

Lemma: se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti interi e $a, b$ sono due interi distinti, allora $a - b$ divide $P(a) - P(b)$.

Dimostrazione del lemma.

Sia $P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, essendo $n$ il grado di $P(x)$. Allora $P(a) - P(b) = \sum_{i=0}^{n} c_i\left(a^i - b^i\right)$. Poiché il binomio $a - b$ divide ogni addendo della sommatoria, allora divide anche $P(a) - P(b)$.

Dimostrazione del teorema.

Distinguiamo due casi:

i) $a$ è un punto fisso di $P(x)$. Allora evidentemente lo è anche di $P\big(P(x)\big)$ e la tesi è dimostrata.

ii) $a$ non è un punto fisso di $P(x)$. Consideriamo la successione definita come segue:

$$x_0 = a, x_{i+1} = P(x_i)$$

per $i = 0,1, \dots, k$. Risulta $x_1 = P(x_0), x_2 = P(x_1), \dots, x_k = P^{(k)}(x_0) = x_0$: si tratta di una successione a valori interi. Consideriamo adesso la successione delle differenze $x_0 - x_1, x_1 - x_2, \dots, x_{k-1} - x_k, x_k - x_{k+1}$. Il primo e l'ultimo termine di questa successione $x_0 - x_1, x_k - x_{k+1}$ sono uguali (e diversi da zero, poiché nel caso in questione $P(a) \neq a$). Il lemma implica che ogni termine della successione delle differenze (eccetto l'ultimo) divide il termine successivo. Consegue che tutte le differenze hanno lo stesso valore assoluto diverso da zero. Sia ora $x_m = \min(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Allora si ha $x_{m-1} - x_m > 0$, $x_m - x_{m+1} < 0$. Poiché i valori assoluti coincidono, deve essere $x_{m-1} - x_m = -(x_m - x_{m+1})$. Ciò implica che $x_{m-1} = x_{m+1}$. Poiché $x_{m+1} = P^{(2)}(x_{m-1})$ posto $n = m - 1$ si ha $x_n = P^{(2)}(x_n)$. Se $x_n = a$ la tesi è dimostrata; altrimenti applicando $P^{(2)}$ ad entrambi i membri della relazione $a = P^{(k)}(a) = P^{(k-n)}(x_n)$ si ottiene $P^{(2)}(a) = P^{(k-n)}\big(P^{(2)}(x_n)\big) = P^{(k-n)}(x_n) = a$.