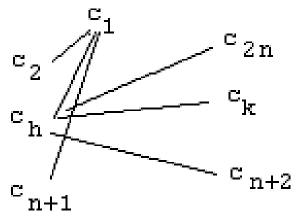
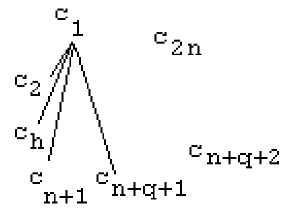
Consideriamo una nazione con 2n città e determiniamo il massimo numero di collegamenti che è possibile creare senza avere triangoli (percorsi chiusi formati da 3 città). Indichiamo le città con $c_{1;}\, c_2;....;c_{2n}$.



Cominciamo dimostrando che è possibile collegare ogni città con n città. Colleghiamo c_1 con $c_2;...;c_{n+1}$; queste città non si possono collegare tra loro (altrimenti si formerebbero dei triangoli). Colleghiamo ognuna delle città $c_2;...;c_{n+1}$ con le città $c_{n+2};...;c_{2n}$ oltre che con c_1. In questo caso i collegamenti sono $\frac{2n(n)}{2} = n^2$.Dimostriamo che questo è il massimo numero di collegamenti.

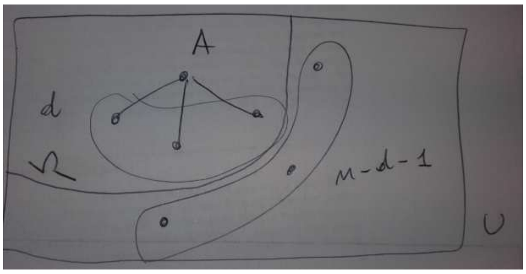


Supponiamo che non lo sia; esiste allora una configurazione con più collegamenti; essa deve avere almeno una città con più di n collegamenti; sia c_1 tale città; se essa é collegata alle n+q città $c_2;...;c_{n+q+1}$; queste città possono avere al massimo n-q collegamenti. Sia c_h una delle città $c_2;...;c_{n+q+1}$. Se eliminiamo i collegamenti di c_h, possiamo collegarla alle $\mathrm{n+q-1}$ città $c_2;...;c_{h-1};c_{h+1};...;c_{n+q+1}$.
Il numero dei collegamenti aumenta di n+q-1-(n-q) = 2q-1>0.
Non vi sono configurazioni di massimo con più di n collegamenti per città.
Se le città sono 2016, il numero massimo di collegamenti è 1013^2.

P.405 Archimede Eureka n2-2016 ADRIANO DONADONI (BERGAMO)

Si tratta del teorema di Mantel.

Sia U l'insieme delle *n* (n pari, *n*=2016) città ed "*e*" il numero di collegamenti delle città.



Sia A la città con il massimo numero di collegamenti, diciamo "*d*" collegamenti, e sia Ω l'insieme delle *d* città collegate ad A. I collegamenti in U non formano triangoli, quindi le città di Ω non sono collegate tra di loro, e quindi ognuna di esse può avere al massimo *n-d* collegamenti (incluso il collegamento con A).

In Ω^c (incluso A, quindi), ci sono *n-d* città ognuna delle quali ha al più *d* collegamenti (perché A ha il massimo dei collegamenti).
Ora, in generale se contiamo per ogni città i collegamenti e sommiano tali numeri, abbiamo il doppio del numero dei collegamenti nella nazione, $2e$.
Ricontimao i collegamenti in un altro modo, considerando la somma sui collegamenti delle città in Ω e sui collegamenti delle città in Ω^c. In Ω abbiamo *d* città con ognuna al massimo *n-d* collegamenti, mentre in Ω^c abbiamo *n-d* città con ognuna al massimo *d* collegamenti.

Quindi $2e \leq 2\,d(n\text{-}d)$ *ovvero* $e \leq d(n-d) \leq \frac{(d+n-d)^2}{4} = \frac{n^2}{4}$ $[ab<((a+b)/2)^2]$

$\frac{n^2}{4}$ rappresenta il massimo numero di possibili collegamenti in assenza di triangoli.

Soluzione problema 405 (Archimede 2/2016) di Giuseppe Fera

Il problema può essere riformulato nel contesto della teoria dei grafi: determinare il numero massimo di archi in un grafo semplice avente 2016 vertici, privo di cicli di lunghezza tre (cicli triangolari). Sia $\lfloor x \rfloor$ il più grande intero minore o uguale ad x. Nel seguito dimostro il seguente teorema (Mantel, 1906): in un grafo semplice G con n vertici, privo di cicli triangolari, il numero massimo di archi è $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.
Pertanto la soluzione del problema si ottiene con $n = 2016$ e risulta 1016064.
Dimostrazione del teorema.
Sia $d(v)$ il numero di archi uscenti dal vertice v (grado del vertice v). Consideriamo due vertici connessi i, j del grafo G e supponiamo che G abbia m archi. Sia A l'insieme dei vertici connessi con i distinti da j e sia B l'insieme dei vertici connessi con j distinti da i. L'insieme A contiene $d(i) - 1$ elementi e analogamente B ne contiene $d(j) - 1$. Poiché G non contiene cicli triangolari, gli insiemi A e B sono disgiunti. Di conseguenza, $d(i) - 1 + d(j) - 1 \leq n - 2$, ossia $d(i) + d(j) \leq n$. Sia ora E l'insieme degli archi di G. Sommiamo $d(i) + d(j)$ su tutti gli archi del grafo:

$$s = \sum_{ij \in E} \big(d(i) + d(j)\big)$$

e trasformiamo s in una somma sui vertici. Se v è un vertice di G, allora il grado $d(v)$ compare nella somma esattamente $d(v)$ volte, una per ogni arco con un estremo in v. Quindi

$$s = \sum_{v \in G} d(v)^2$$

Poiché $d(i) + d(j) \leq n$ allora $s \leq nm$. Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2$$

con $x_i = d_i$, $y_i = 1$, si ottiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n} d_i \right)^2 \leq n^2 m$$

La somma al primo membro è fatta sui vertici e quindi conta due volte ogni arco: perciò vale $2m$. Consegue la tesi del teorema:

$$m \leq \frac{n^2}{4}$$

Si può dimostrare che il grafo massimale è unico. Nel caso n pari, è il grafo completo bipartito $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ che ha n vertici e $\frac{n^2}{4}$ archi. Nel caso n dispari, è $K_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}}$ che ha n vertici e $\frac{n^2-1}{4}$ archi.