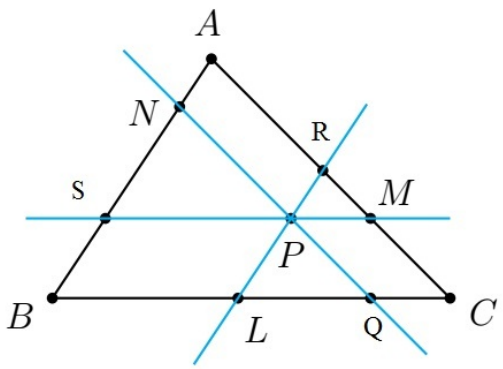
P.404 Archimede eureka n.1-2016 **ADRIANO DONADONI (BG)**



In riferimento alla figura qui sopra, la parallela ad AB interseca i due lati BC e AC nei due punti L e R tali che $AR=(1-h)AC$ e $BL/LC=(1-h)/h$ con h reale $0<h<1$, mentre la parallela a BC interseca i due lati AC e AB nei due punti M e S, tali che $CM/MA=(1-k)/k$ con k reale $1-h<k<1$ $(AC>AM>AR$, condizione affinche' le due rette si intersechino in un punto P interno al triangolo).

$RM=RC-MC=hAC-(1-k)AC=(h+k-1)AC$

Il triangolo PRM e' simile al triangolo ABC e quindi $PR=(h+k-1)AB$

$ANPR$ e' un parallelogramma per costruzione, e quindi $AN=PR$ e infine $AN/NB=(h+k-1)/(2-h-k)=1/(2-h-k)-1$

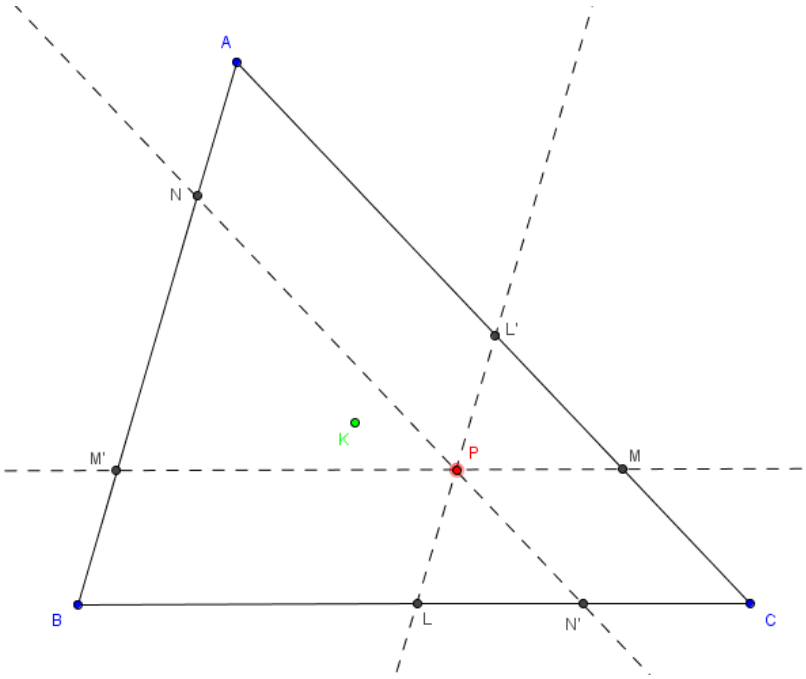
Consideriamo la funzione

$f(h,k) := (BL.CM.AN)/(LC.MA.NB) = \left(\frac{1}{h}-1\right)\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{2-h-k}-1\right)$
$con\ 0<h<1\ e\ 1-h<k<1.$

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{(k-1)^2(2h+k-2)}{h^2\,k\,(2-h-k)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial k} = \frac{(h-1)^2(h+2k-2)}{h\,k^2(2-h-k)^2}$$

Dallo studio delle derivate parziali di $f(h,k)$ nel vincolo indicato si deduce che tale funzione ha un massimo relativo e assoluto di valore ⅛ per $h = k = ⅔$, a cui corrisponde P nel baricentro del triangolo ABC.

Soluzione problema 404 (Archimede 1/2016) di Giuseppe Fera



Siano L', M', N' gli ulteriori punti di intersezione delle rette parallele con i lati del triangolo, come in figura. Indico nel modo standard gli angoli α, β, γ, i lati a, b, c, il semiperimetro p e l'area S del triangolo ABC. Indico con X, Y, Z le coordinate trilineari del punto P, ossia le distanze del punto P dai lati a, b, c del triangolo. Tali coordinate non sono indipendenti, poiché se il punto P è interno al triangolo allora $aX + bY + cZ = 2S$. Risulta:

$$X = BM' \sin\beta$$
$$Y = CN' \sin\gamma$$
$$Z = AL' \sin\alpha$$

Per il teorema di Talete, il primo fattore dell'espressione da massimizzare si può esprimere:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AL'}{L'C}$$

dove $L'C = b - AL'$. Utilizzando l'espressione precedente per AL' si ottiene:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{Z}{b\sin\alpha - Z}$$

e analogamente

$$\frac{CM}{MA} = \frac{X}{c\sin\beta - X}$$
$$\frac{AN}{NB} = \frac{Y}{a\sin\gamma - Y}$$

In queste espressioni compaiono le altezze del triangolo $h_C = b\sin\alpha, h_B = a\sin\gamma, h_A = c\sin\beta$. Introducendo le coordinate ridotte $x = \frac{X}{h_A}, y = \frac{Y}{h_B}, z = \frac{Z}{h_C}$ l'espressione da massimizzare risulta:

$$f(x,y,z) = \frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}\frac{z}{1-z}$$

con $x, y, z \in (0,1), x+y+z=1$. Dimostriamo ora che $f(x,y,z) \leq \frac{1}{8}$ e che $f(x,y,z) = \frac{1}{8}$ quando P coincide con il punto K di coordinate $x = y = z = \frac{1}{3}$ tale che le rette passanti per K e parallele ai lati dividono i lati del triangolo nel rapporto 2:1. Questa proprietà implica che K è il baricentro del triangolo.

E' equivalente dimostrare che se $x+y+z=1$ allora

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right) \geq 8$$

Poiché x, y, z sono positivi, la tesi equivale alla

$$(1-x)(1-y)(1-z) \geq 8xyz$$

ovvero

$$1-x-y-z+xy+yz+zx-xyz \geq 8xyz$$

ovvero

$$xy+yz+zx \geq 9xyz$$

ovvero

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 9$$

Per la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica si ha che

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$$

per cui è sufficiente dimostrare che $\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 9$, ovvero $1 \geq 3\sqrt[3]{xyz}$. Ma questa discende ancora dalla disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica scritta nella forma

$$1 = x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

Si ha infine che l'uguaglianza è verificata se e solo se $x = y = z = \frac{1}{3}$. Quindi il valore massimo possibile per il prodotto $\frac{BL}{LC}\frac{CM}{MA}\frac{AN}{NB}$ risulta 1/8 e viene assunto quando P coincide con il baricentro del triangolo.

Problema 404. Silvio Giordano (di Cosenza)

Soluzione. Tracciando per P le parallele ai lati, il triangolo ABC risulta suddiviso in tre parallelogrammi e tre triangoli simili ad ABC. Indichiamo con S l'area di ABC e con S_1, S_2, S_3 le aree degli altri tre triangoli (vedi figura 1). Posto $p = \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB}$, proveremo che $p \leq \frac{1}{8}$. E poiché p vale $\frac{1}{8}$ (valendo ogni suo fattore $\frac{1}{2}$) se il punto P (vedi figura 2) è il baricentro di ABC (si tratta di una conseguenza del teorema di Talete e del ben noto fatto che il baricentro di un triangolo divide ciascuna mediana in due parti tali che quella avente per estremo un vertice è doppia dell'altra), ne seguirà che il valore massimo possibile per p è proprio $\frac{1}{8}$.

Poiché le aree di triangoli simili stanno tra di loro come i quadrati di lati omologhi, risulta:

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{ZP}{BC}, \qquad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{LX}{BC}, \qquad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{PM}{BC}$$

Essendo $ZP = BL \;\; e \; PM = XC$, in quanto lati opposti di parallelogrammi, si ha, relativamente al lato BC:

$$\frac{BL}{BC} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}, \qquad \frac{LC}{BC} = \frac{LX + XC}{BC} = \frac{LX}{BC} + \frac{XC}{BC} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}$$

da cui

$$\frac{BL}{LC} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}$$

Analogamente, considerando i lati AC e AB si ottiene:

$$\frac{CM}{MA} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3}} \;\; ; \;\; \frac{AN}{NB} = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}$$

Per semplicità, poniamo ora: $\sqrt{S_1} = x, \;\; \sqrt{S_2} = y, \;\; \sqrt{S_3} = z$; risulta perciò:

$$p = \frac{x}{y+z} \cdot \frac{y}{x+z} \cdot \frac{z}{x+y}$$

Utilizzando tre volte la diseguaglianza tra media geometrica e media aritmetica, si ha:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad \sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}, \quad \sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2}$$

valendo il segno di uguaglianza, rispettivamente, se e solo se $x = y, \; y = z, \; x = z,$ e quindi se e solo se $x = y = z$ (cioè, se e solo se $S_1 = S_2 = S_3$). Moltiplicando poi membro a membro le tre precedenti diseguaglianze, si ha:

$$xyz \leq \frac{x+y}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \cdot \frac{x+z}{2}$$

equivalente a

$$\frac{x}{y+z} \cdot \frac{y}{x+z} \cdot \frac{z}{x+y} \leq \frac{1}{8}$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Silvio Giordano (di Cosenza)

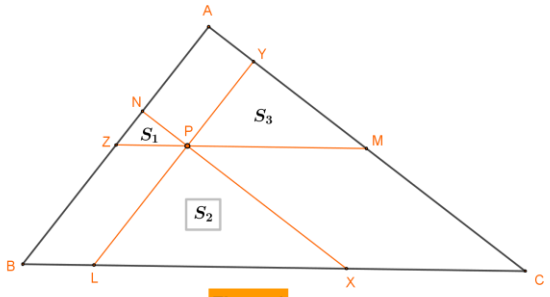


Figura 1

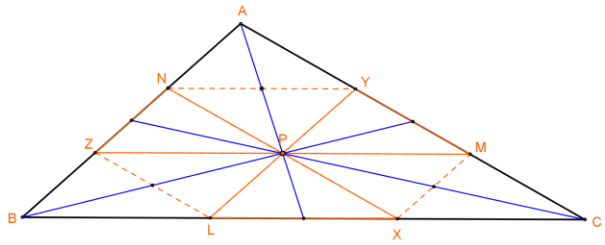
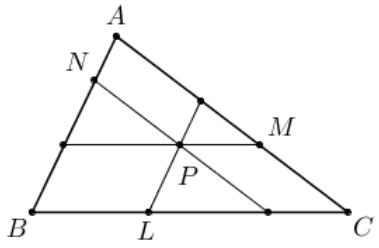


Figura 2

Problema 404.

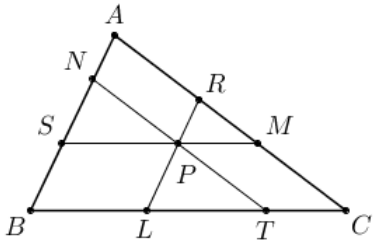
Dato un triangolo ABC ed un punto P interno ad esso, tracciamo le rette per P parallele ai lati, e definiamo i punti L, M, N come in figura.



Determinare, al variare del punto P, il valore massimo possibile per il prodotto

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}$$

Completiamo la figura definendo i punti R, S, T che sono le ulteriori intersezioni delle rette per P parallele ai lati.



Considerate come variabili le lunghezze dei segmenti BL, CM, AN la quantità da massimizzare si può scrivere come

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{BL}{BC-BL}\cdot\frac{CM}{CA-CM}\cdot\frac{AN}{AB-AN}$$

Le tre variabili non sono tra loro indipendenti quindi cerchiamo una relazione che costituisca un vincolo tra questi elementi del problema. Osserviamo che nella figura si formano tre parallelogrammi: $BLPS$, $TCMP$, $PRAN$; in particolare dagli ultimi due si ha: $CM=TP$, $PM=TC$, $PR=AN$.
Il triangolo PLT è simile al triangolo ABC dunque $LT/TP=BC/CA$ e quindi

$$LT=\frac{BC}{CA}\cdot TP=\frac{BC}{CA}\cdot CM\ .$$

Anche il triangolo PMR è simile al triangolo ABC dunque $PM/PR=BC/AB$ e quindi

$$PM=\frac{BC}{AB}\cdot PR\rightarrow TC=\frac{BC}{AB}\cdot AN\ .$$

Il lato BC si può esprimere come $BL+LT+TC=BC$ e dalle relazioni precedenti risulta

$$BL+\frac{BC}{CA}\cdot CM+\frac{BC}{AB}\cdot AN=BC$$

da cui

$$\frac{BL}{BC}+\frac{CM}{CA}+\frac{AN}{AB}=1.$$

Anche la quantità da massimizzare si può esprimere in funzione degli stessi rapporti e posti $\frac{BL}{BC}=x$, $\frac{CM}{CA}=y$, $\frac{AN}{AB}=z$ risulta $\frac{BL}{BC-BL}\cdot\frac{CM}{CA-CM}\cdot\frac{AN}{AB-AN}=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z}$ con $x+y+z=1$.

Il problema consiste nella ricerca di un massimo condizionato; posto $0\le x<1$, $0\le y<1$, $0\le z<1$ si ha

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ f(x,y,z)=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z} \end{cases}$$

Conviene modificare il dominio in $0<x<1$, $0<y<1$, $0<z<1$ e scrivere la funzione in modo diverso

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1} \end{cases}$$

Quando la quantità $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ è minima allora $f(x,y,z)$ è massima e il problema diventa la ricerca, sullo stesso dominio, del minimo condizionato

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ g(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \end{cases}$$

Dimostreremo in appendice che la $g(x,y,z)$ è minima quando $x=y=z=\frac{1}{3}$ e quindi il massimo richiesto vale

$$f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{8}.$$

Riassumendo, il prodotto $\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}$ è massimo quando $BL=\frac{BC}{3}$, $CM=\frac{CA}{3}$, $AN=\frac{AB}{3}$ e

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{1}{8}$$

Dimostriamo che il minimo della funzione $g(x,y,z)$ con $0<x<1$, $0<y<1$, $0<z<1$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ g(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \end{cases}$$

si ha quando le tre variabili sono uguali cioè quando $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Iniziamo da un analogo problema in due variabili che si ottiene dal precedente ponendo z costante. Ancora prendiamo $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ e nulla vieta che anche per la costante z sia $0 < z < 1$, dunque

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ g(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene

$$g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{(1-z) - x} + \frac{1}{z} = + \frac{1-z}{x\left[(1-z) - x\right]} + \frac{1}{z}$$

$g(x)$ è minima quando il denominatore della prima frazione e massimo cioè quando $x = \frac{1-z}{2}$ e dall'equazione del vincolo risulta che le due variabili sono uguali $x = y = \frac{1-z}{2}$. Poiché per ogni fissato valore di z si ha un minimo in $x = y = (1-z)/2$ inseriamo questa condizione in $g(x, y, z)$ e facciamo variare z:

$$g(z) = \frac{4}{1-z} + \frac{1}{z}.$$

Studiando questa funzione nel suo dominio naturale risulta che ammette un massimo in $z = -1$ e un minimo in $z = \frac{1}{3}$. Il minimo è l'unico dato rilevante ai fini del problema in quanto compreso all'intervallo $0 < z < 1$.

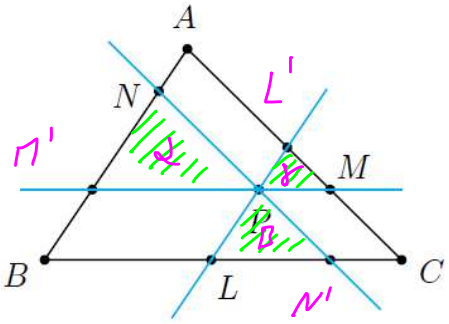
Dato che anche $x = y = \frac{1-z}{2} = \frac{1}{3}$ si ha

$$x = y = z = \frac{1}{3}.$$

GIUSEPPE MUSINU, RAVENNA

PROBLEMA 404.

Dato un triangolo ABC ed un punto P interno ad esso, tracciamo le rette per P parallele ai lati, e definiamo i punti L, M, N come in figura.



Determinare, al variare del punto P, il valore massimo possibile per il prodotto

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}.$$

(1) I TRIANGOLI $\overset{\triangle}{PNM'}$, $\overset{\triangle}{PLN'}$ E $\overset{\triangle}{PML'}$ SONO SIMILI PER COSTRUZIONE A $\overset{\triangle}{ABC}$

(2) LA SOMMA DEI PERIMETRI DI $\overset{\triangle}{PNM'}$, $\overset{\triangle}{PLN'}$ E $\overset{\triangle}{PML'}$ È UGUALE AL PERIMETRO DI $\overset{\triangle}{ABC}$, INFATTI:

$$\begin{cases} BC = M'P + LN' + PM \\ AC = NP + L'M + PN' \\ AB = L'P + NM' + PL \end{cases} \rightsquigarrow AB+BC+AC = \begin{cases} (M'P+NP+NM')+ \\ +(LN'+PN'+PL)+ \\ +(PM+L'M+L'P) \end{cases}$$

DA (1) E (2) OTTENIAMO:

$$2p_{ABC} = 2p_{PMM'} + 2p_{PLN'} + 2p_{PML'} = \alpha\cdot 2p_{ABC} + \beta\cdot 2p_{ABC} + \gamma\, 2p_{ABC}$$

(3) $\alpha+\beta+\gamma=1 \qquad 0\le\alpha,\beta,\gamma\le 1$

RISCRIVIAMO IL PRODOTTO

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB} = \frac{PM'}{PM+LN'}\;\frac{PN'}{PN+L'M}\;\frac{PL'}{PL+NM'}$$

OTTENIAMO

$$\frac{\alpha\,\cancel{BC}}{(\beta+\gamma)\cancel{BC}}\;\frac{\beta\cdot\cancel{AC}}{(\alpha+\gamma)\cancel{AC}}\;\frac{\gamma\,\cancel{AB}}{(\alpha+\beta)\cancel{AB}} = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)} =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta+\gamma}\cdot\frac{\beta}{\alpha+\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma}$$

GIUSEPPE MUSINU, RAVENNA

IL PROBLEMA È RICONDOTTO ALLO STUDIO DELLA FUNZIONE:

$$\begin{cases} f(\alpha,\beta,\gamma) = g(\alpha)g(\beta)g(\gamma) & \text{con } g(x) = \dfrac{x}{1-x} \quad g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} \\ \alpha+\beta+\gamma = 1 & \alpha,\beta,\gamma \in [0,1) \end{cases}$$

STUDIO AL BORDO

1) P ∈ LATI VERTICI ESCLUSI

$$f(0,\beta,\gamma) = f(\alpha,0,\gamma) = f(\alpha,\beta,0) = 0$$

2) P → VERTICI

$$P \to C \rightsquigarrow (\alpha,\beta,\gamma) \to (1,0,0)$$

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}\cdot\frac{\beta}{\alpha+\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{\overset{\to 1}{\alpha}}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)}\;\frac{\overset{\to 0}{\beta\gamma}}{\beta+\gamma} \to 0$$

STESSA COSA PER $P \equiv A$, $P \equiv B$

$\rightsquigarrow$ f È NULLA AL BORDO

$\Rightarrow$ f AMMETTE MASSIMO (X WEIERSTRASS GENERALIZZATO)

STUDIO ALL'INTERNO DEL DOMINIO (P INTERNO AL TRIANGOLO)

SI APPLICA IL METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$$\begin{cases} f(\alpha,\beta,\gamma) = g(\alpha)g(\beta)g(\gamma) \\ \Phi = \alpha+\beta+\gamma-1 \qquad \alpha,\beta,\gamma \in (0,1) \rightsquigarrow g(\alpha), g(\beta), g(\gamma) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = g'(\alpha)g(\beta)g(\gamma) = \dfrac{g(\alpha)}{\alpha^2}\,g(\alpha)g(\beta)g(\gamma) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\cdot\lambda = \lambda \\ \dfrac{\partial f}{\partial \beta} = \dfrac{g(\beta)}{\beta^2}\,g(\alpha)g(\beta)g(\gamma) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta}\cdot\lambda = \lambda \\ \dfrac{\partial f}{\partial \gamma} = \dfrac{g(\gamma)}{\gamma^2}\,g(\alpha)g(\beta)g(\gamma) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\cdot\lambda = \lambda \end{cases}$$

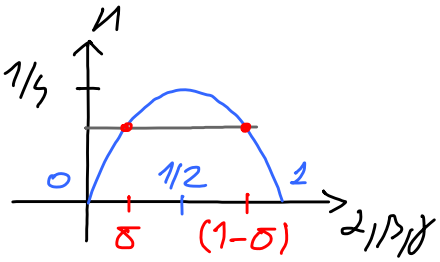
λ $= 0 \rightsquigarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0 \vee \gamma = 0 \rightsquigarrow$ NON ACCETTABILE

$\neq 0 \rightsquigarrow$ SEMPLIFICHIAMO

GIUSEPPE MUSINU, RAVENNA

$$\begin{cases} \dfrac{g(\alpha)}{\alpha^2}\, g(\alpha)g(\beta)g(\gamma) = 2 \qquad \dfrac{1}{\alpha(1-\alpha)} = \dfrac{2}{g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)} \rightsquigarrow \alpha(1-\alpha) = u \\ \dfrac{g(\beta)}{\beta^2}\, g(\alpha)g(\beta)g(\gamma) = 2 \rightsquigarrow \beta(1-\beta) = u \\ \dfrac{g(\gamma)}{\gamma^2}\, g(\alpha)g(\beta)g(\gamma) = 2 \rightsquigarrow \gamma(1-\gamma) = u \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \alpha(1-\alpha) = \beta(1-\beta) = \gamma(1-\gamma) = u \\ \alpha+\beta+\gamma = 1 \end{cases}$$

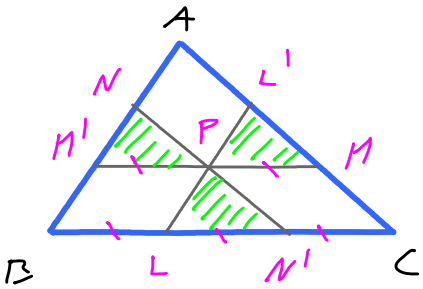


SIA $\delta \in (0, 1/2)$ $\forall u \in (0, 1/4)$ α, β, γ POSSONO ASSUMERE I SEGUENTI VALORI:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = \delta+\delta+\delta = 1 \rightsquigarrow 3\delta = 1 \qquad \underline{\delta = 1/3} \quad \text{OK} \\ \alpha+\beta+\gamma = \delta+\delta+(1-\delta) = 1 \rightsquigarrow \delta+1 = 1 \qquad \delta = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = \delta+2(1-\delta) = 1 \rightsquigarrow \delta = 1 \end{cases} \quad \text{NON ACCETTABILI}$$

$$\rightsquigarrow \alpha = \beta = \gamma = 1/3 \qquad \mathrm{MAX}(f) = f(1/3, 1/3, 1/3) = \left(\frac{1/3}{2/3}\right)^3 = 1/8$$

MOSTRIAMO CHE ESISTE P INTERNO T.C. $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{1}{3}$



SIANO $BL = LN' = N'C = \dfrac{BC}{3}$

TRACCIAMO $LL' \parallel AB$, $N'N \parallel AC$ $M'M \parallel BC$

RISULTA: $M'P = BL = LN'$ $PM = N'C = LN'$

PERTANTO $\overset{\triangle}{PNM'}$, $\overset{\triangle}{PLN'}$ E $\overset{\triangle}{PML'}$ SONO CONGRUENTI

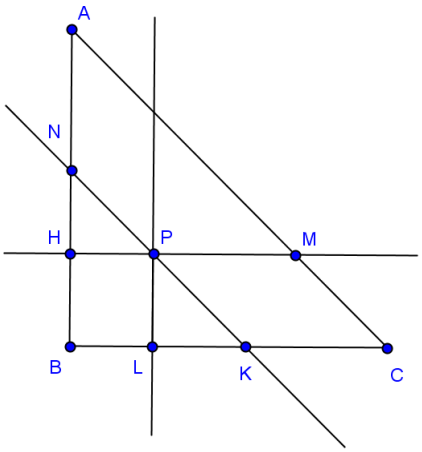
$$M'N = PL = BM' = PL' = NA = \frac{AB}{3} \qquad L'M = PN' = MC = PN = AL' = \frac{AC}{3}$$

P COINCIDE CON IL BARICENTRO ED È SEMPRE INTERNO A $\overset{\triangle}{ABC}$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} P \in \text{VERTICI}: \ \dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{CM}{MA}\cdot\dfrac{AN}{NB} \ \text{NON DEFINITA} \\ P \in \text{LATI (VERTICI ESCLUSI)}: \ \dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{CM}{MA}\cdot\dfrac{AN}{NB} = 0 \\ P \text{ INTERNO}: \ \mathrm{MAX}\left(\dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{CM}{MA}\cdot\dfrac{AN}{NB}\right) = 1/8 \ (P \equiv \text{BARICENTRO}) \end{cases}$$

Soluzione problema 404 di Alessandro Pieragalli di Arezzo

Il problema è invariante per affinità (l'affinità conserva il rapporto tra segmenti allineati).
Possiamo quindi risolvere il problema considerando un triangolo "più semplice". Ad esempio un triangolo rettangolo isoscele avente i cateti di lunghezza unitaria, come riportato in figura.



Posto $BL = x$ e $BH = y$, si hanno le seguenti uguaglianze

$$\frac{BL}{LC} = \frac{x}{1-x};$$

$$\frac{CM}{MA} = \frac{BH}{HA} = \frac{y}{1-y}$$ per il teorema di Talete;

$$\frac{AN}{NB} = \frac{KC}{BK} = \frac{BC-BK}{BK} = \frac{1-x-y}{x+y}$$ per il teorema di Talete e poiché $LK = LP = y$.

Pertanto $$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB} = \frac{xy(1-x-y)}{(1-x)(1-y)(x+y)}.$$

Dalla disuguaglianza $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ valida per a,b positivi segue che

$$xy(1-x-y) = \sqrt{xy}\cdot\sqrt{x(1-x-y)}\cdot\sqrt{y(1-x-y)} \le \frac{x+y}{2}\cdot\frac{1-y}{2}\cdot\frac{1-x}{2}.$$

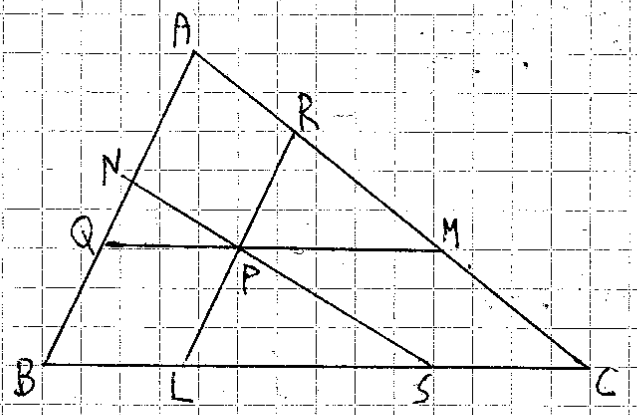
Da cui $$\frac{xy(1-x-y)}{(1-x)(1-y)(x+y)} \le \frac{1}{8}$$

con uguaglianza se e solo se $x = y = 1-x-y \leftrightarrow x = y = 1/3$.

In conclusione il massimo cercato è $\frac{1}{8}$.

Invio la proposta di soluzione relativa al problema 404 pubblicata nel numero di gennaio-marzo 2016 della rivista Archimede.

Con riferimento alla seguente figura



sia $AB = c$. $BC = a$ $AC = b$

posto $\overline{PQ} = x \cdot a$ e $\overline{PM} = y \cdot a$ con $0 < x < 1$; $0 < y < 1$; $0 < x + y < 1$

risulta evidentemente (in base alla similitudine fra triangoli e alle proprietà dei parallelogrammi)

$BL = ax$ $CS = ay$ e di conseguenza $LC = a \cdot (1 - x)$

$BS = a(1 - y)$ e dunque $\overline{NB} = c(1 - y)$ e $\overline{AN} = cy$

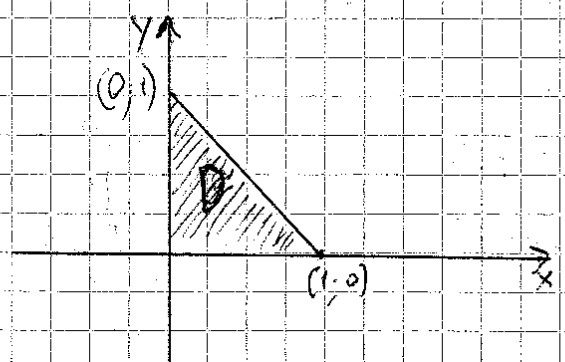
$QM = a(x + y)$ e di conseguenza $\overline{MA} = b(x + y)$ e $\overline{CM} = b(1 - x - y)$

Pertanto $\dfrac{BL}{LC} \cdot \dfrac{CM}{MA} \cdot \dfrac{AN}{NB} = \dfrac{x}{1-x} \cdot \dfrac{1-x-y}{x+y} \cdot \dfrac{y}{1-y}$

Considero la funzione $F(x,y) = \dfrac{x}{1-x} \cdot \dfrac{1-x-y}{x+y} \cdot \dfrac{y}{1-y}$ definita

nel dominio $D : \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } 0 < x < 1 , 0 < y < 1 , 0 < x + y < 1 \}$

ovvero



la funzione è uguale a zero in ogni punto della frontiera di D ed è in
ntinua e derivabile

Per trovare il massimo richiesto pongo $x+y=s$ e considero la
funzione $g(x)=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-s}{s}\cdot\frac{s-x}{1-s+x}$ ottenuta da $F(x,y)$
ostituendo al posto di y la quantità $s-x$.

Pertanto $g(x)=\frac{1-s}{s}\cdot\frac{sx-x^2}{1-x^2-s+sx}$ $\quad 0<x<1$.

Con facili calcoli si trova che $g'(x)=\frac{(2x-s)(s-1)}{(1-x^2-s+sx)^2}$ di conseguenza
ricordando che $s-1<0$ per ipotesi) per $x=\frac{s}{2}$ si ha un punto di
massimo assoluto per $g(x)$ e risulta $g\left(\frac{s}{2}\right)=\frac{s-s^2}{(2-s)^2}$

a sua volta la quantità $h(s)=\frac{s-s^2}{(2-s)^2}$ $\quad 0<s<1$ è continua e
derivabile in tale intervallo e risulta $h'(s)=\frac{3s-2}{(s-2)^3}$ che si annulla
per $s=\frac{2}{3}$. In corrispondenza di tale valore di s $h(s)$ ammette un
punto di massimo assoluto e risulta $h\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{8}$.

A questo punto concludo che il massimo cercato vale $\frac{1}{8}$ e si ha per $s=\frac{2}{3}$
e dunque (essendo $x=\frac{s}{2}$ $y=s-x$) per $x=y=\frac{1}{3}$ ovvero quando il
punto P è il baricentro del triangolo ABC.

MITTENTE: VIDONI ALDO
VIA PALLADA 39/B
33100 UDINE

Udine 11/5/2016

Aldo Vidoni