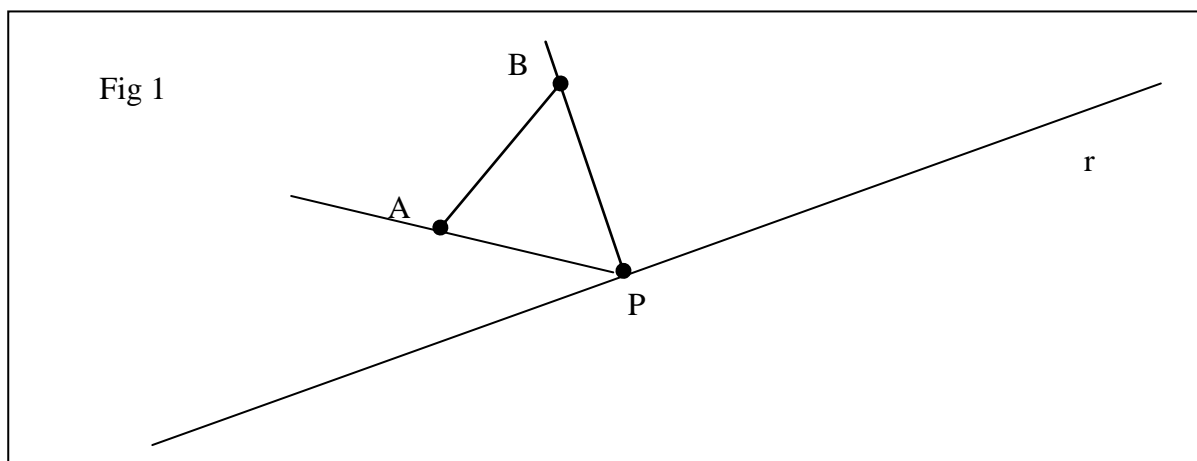


MaxAngle -

Il Punto dell'angolo massimo (Parte II)

Se in un piano sono dati due punti A e B ed una retta r , con A e B non appartenenti alla retta, allora fra gli infiniti punti P_i della retta, ce ne sarà uno ed uno solo, il punto P, in cui l'angolo APB sarà il massimo possibile (Fig. 1)

If in a plane are given two points A and B and a line r, with A and B not belonging to the line, then among the infinite points P_i of the line, there will be one and only one, the point P, in which the angle APB will be the maximum possible (Fig. 1)

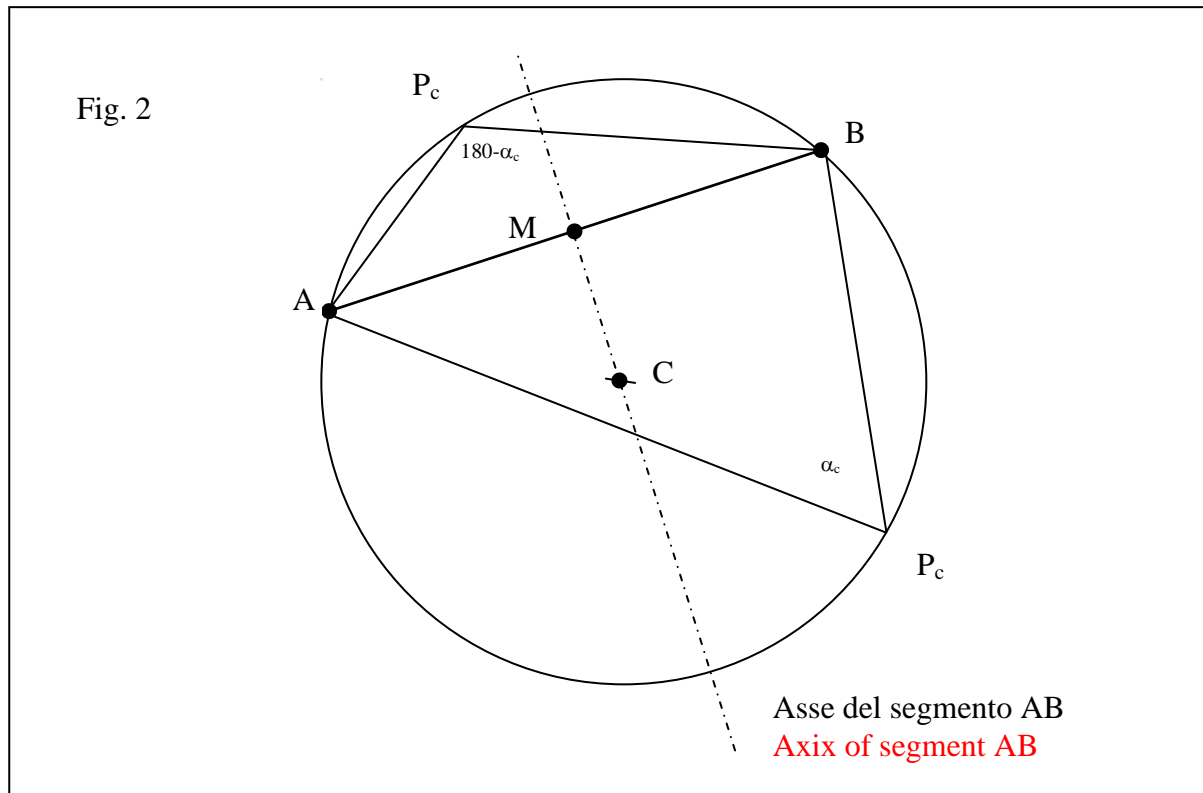


Ricordando:

- che i cerchi capaci sono appunto cerchi aventi il proprio centro C sull'asse del segmento AB e tali che il segmento AB ne rappresenta una corda che li divide in due parti: quella includente il centro e, appunto, quella non includente il centro,
- che la loro caratteristica è che da tutti i loro punti P_c , si osserva la corda AB sotto uno stesso specifico angolo alla circonferenza e, precisamente i punti appartenenti all'arco includente il centro osservano AB sotto l'angolo α_c , mentre i punti della parte non includente il centro, la osservano sotto l'angolo supplementare $180 - \alpha_c$ (Fig. 2)

Recalling:

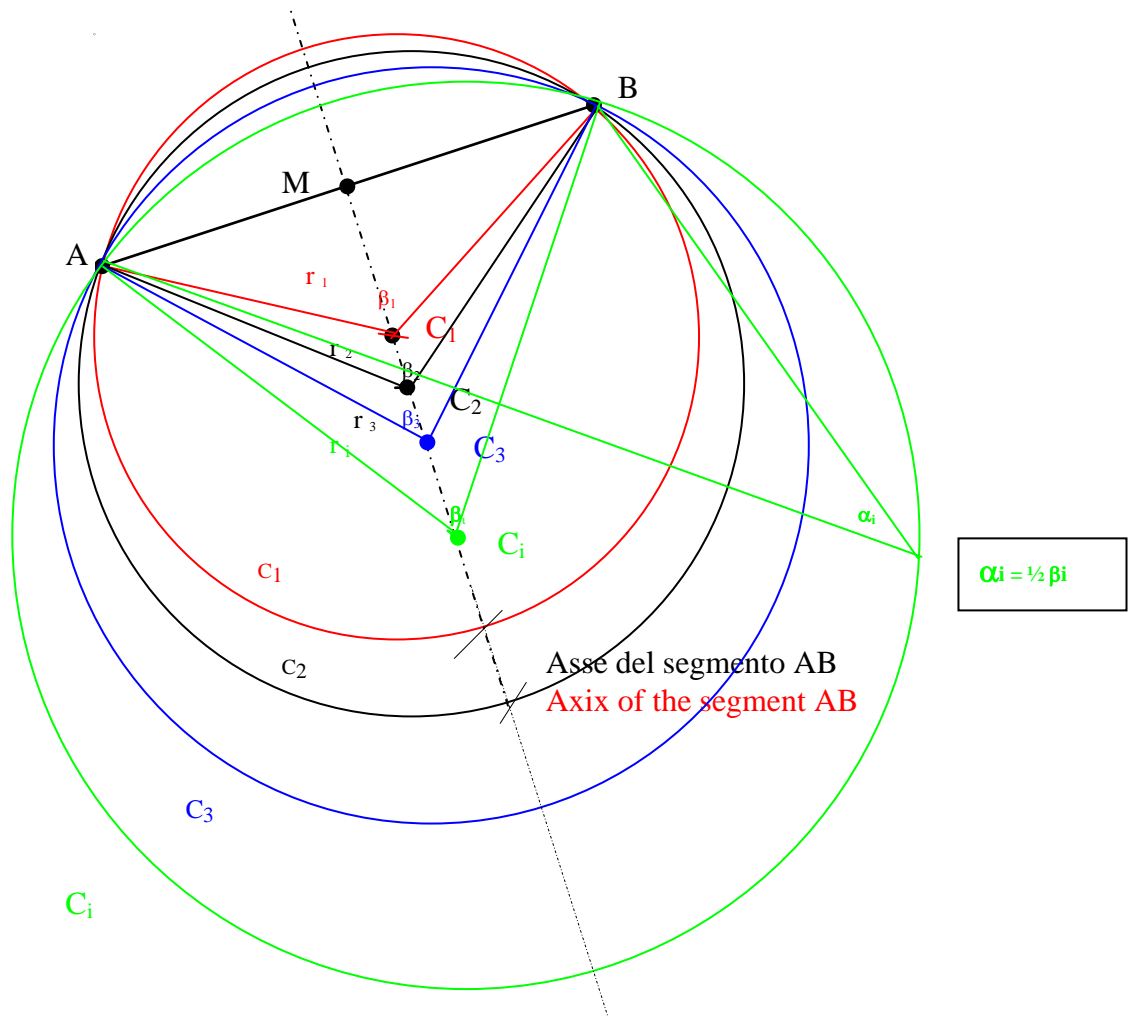
- that the Snellius circles are just circles having their own centre C on the axis of the segment AB and such that the segment AB is a their chord, dividing them in two parts: the one including the centre and the other, just not including the centre,
- that their characteristic is that from all their points P_c , the chord AB is observed under a same specific circumference angle and, precisely, the points of the part including the centre, observe AB under the angle α_c , whereas the points of the parts not including the centre, observe it under the supplementary angle $180 - \alpha_c$ (Fig. 2)



-per i punti A e B passano infiniti cerchi capaci, tutti aventi i loro centri C_i sull'asse del segmento AB ma con raggi r_i crescenti, a mano a mano che i centri dei cerchi capaci si allontanano dal piede M dell'asse del segmento AB (Fig.3);

-for the points A and B pass infinite Snellius circles, all having their own centres C_i on the axis of the segment AB but with radii growing as the centres of the Snellius circles move away from the base M of the axis of the segment AB (Fig.3);

Fig. 3



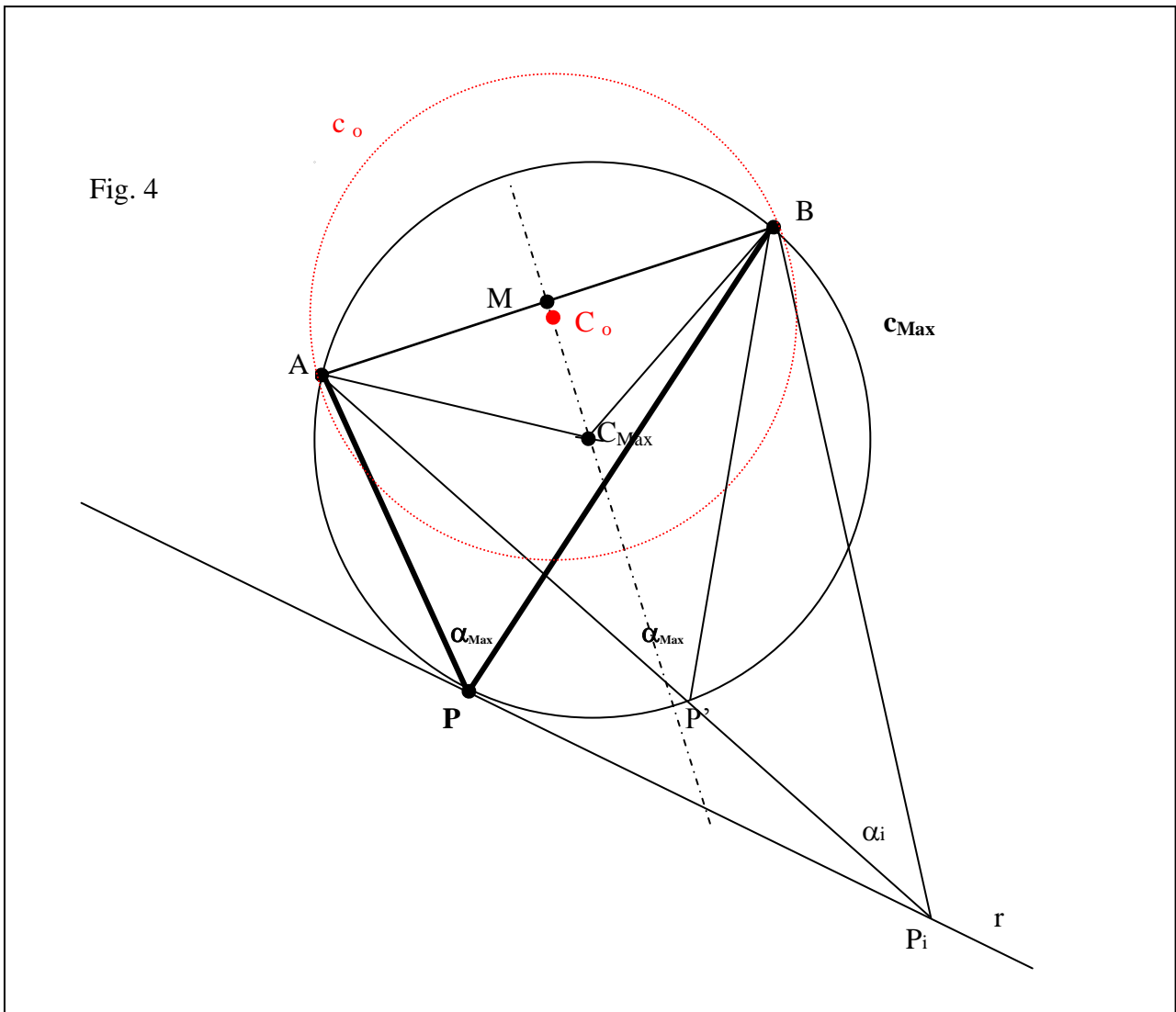
- considerando che con gli infiniti centri C_i sull'asse del segmento AB, si crea una famiglia di infiniti triangoli isosceli, tutti aventi come base AB, come lati obliqui, il raggio di un certo cerchio capace e come vertice, appunto il centro C_i del cerchio capace in questione (Fig.3), ne consegue, intuitivamente e per il teorema di Carnot, che aumentando la lunghezza dei raggi dei cerchi capaci, e cioè aumentando la distanza dei loro centri C_i dalla base M dell'asse del segmento AB, diminuisce l'ampiezza degli angoli al vertice β_i dei triangoli isosceli AC_iB e, per essere questi angoli al vertice β_i dei triangoli isosceli anche gli angoli al centro del corrispondente cerchio capace insistente sulla corda AB, si ha, in definitiva, che aumentando la lunghezza dei raggi r_i dei cerchi capaci, diminuiscono i corrispondenti angoli al centro, gli appena detti β_i e quindi, di conseguenza, diminuiscono anche le loro metà e cioè gli angoli alla circonferenza α_i , caratteristici di un certo cerchio capace, come su ricordato (Fig.3)

-considering that with the infinite centres C_i on the axis of the segment AB, is created a family of infinite isosceles triangles, all having as base AB, as oblique sides, the radius of a certain Snellius circle and as vertex, just the centre C_i of the Snellius circle on matter (Fig.3), it follows, intuitively and for the Carnot theorem, that increasing the length of the radii of the Snellius circles, that is increasing the distance of their centres C_i from the base M of the axis of segment AB, decreases the

amplitude of the vertex angles β_i of the isosceles triangles AC_iB and, for being these vertex angles β_i of the isosceles triangles also the centre angles of the corresponding Snellius circle constructed on the chord AB ,
in the end it results that increasing the length of the radii r_i of the Snellius circles, decrease also their halves and that is the circumference angles α_i , characteristic of a certain Snellius circle, as above recalled (Fig.3)

Ora, dati i due punti A e B di cui sopra e una retta r , naturalmente ad ogni punto P_i della retta r , corrisponderà un angolo $\alpha_i = \angle AP_iB$.
Fra gli infiniti angoli AP_iB , quello al punto P , di tangenza del cerchio capace con la retta, risulta essere il massimo possibile (Fig.4)

Now, given the above points A and B and a line r , of course at each point P_i of the line r , will correspond an angle $\alpha_i = \angle AP_iB$.
Among the infinite angles AP_iB , that at point P , of tangency of the Snellius circle with the line, results to be the maximum possible (Fig.4)



Infatti fra gli infiniti cerchi capaci costruibili sul segmento AB e intersecanti in due punti la retta r, il cerchio capace tangente alla retta, risulta avere il suo centro C_{Max} il più vicino possibile al segmento AB e quindi col suo angolo alla circonferenza massimo possibile. Naturalmente, al di sotto della tangenza, si determinerebbero cerchi capaci c_0 di centro C_0 senza alcun contatto/intersezione con la retta e quindi non interessanti la ricerca qui in oggetto.

In fact among the infinite Snellius circles constructible on the segment AB and intersecting in two points the line r, the Snellius circle tangent to the line, results to have its centre C_{Max} the closest possible to the segment AB and therefore with its circumference angle of maximum possible amplitude. Of course, down the tangency, the Snellius circles c_0 result to have centres C_0 but without any contact/intersection with the line and therefore not interesting the research here on matter.

E, allo stesso risultato si giunge (Fig.4) osservando che l'angolo α_{Max} , ripetuto nel punto P' del cerchio capace tangente, è maggiore di qualsiasi angolo α_i nei punti non tangenti P_i della retta. Infatti, nel triangolo BP_iP' , α_i è un angolo interno non adiacente all'angolo esterno α_{Max} in P' e quindi minore di questi.

The same result is obtained (Fig.4) observing that the angle α_{Max} , repeated in point P' of the tangent Snellius circle, is greater than any angle α_i in the not tangent points P_i of the line. In fact, in the triangle BP_iP' , α_i is an internal angle not adjacent to the external angle α_{Max} in P' and therefore smaller than α_{Max} .

Dunque, per tutto quanto sopra, al cerchio capace di tangenza e solo a questi, appartiene l'angolo alla circonferenza α_{Max} , massimo possibile, dati quei punti A e B e data quella certa retta r.

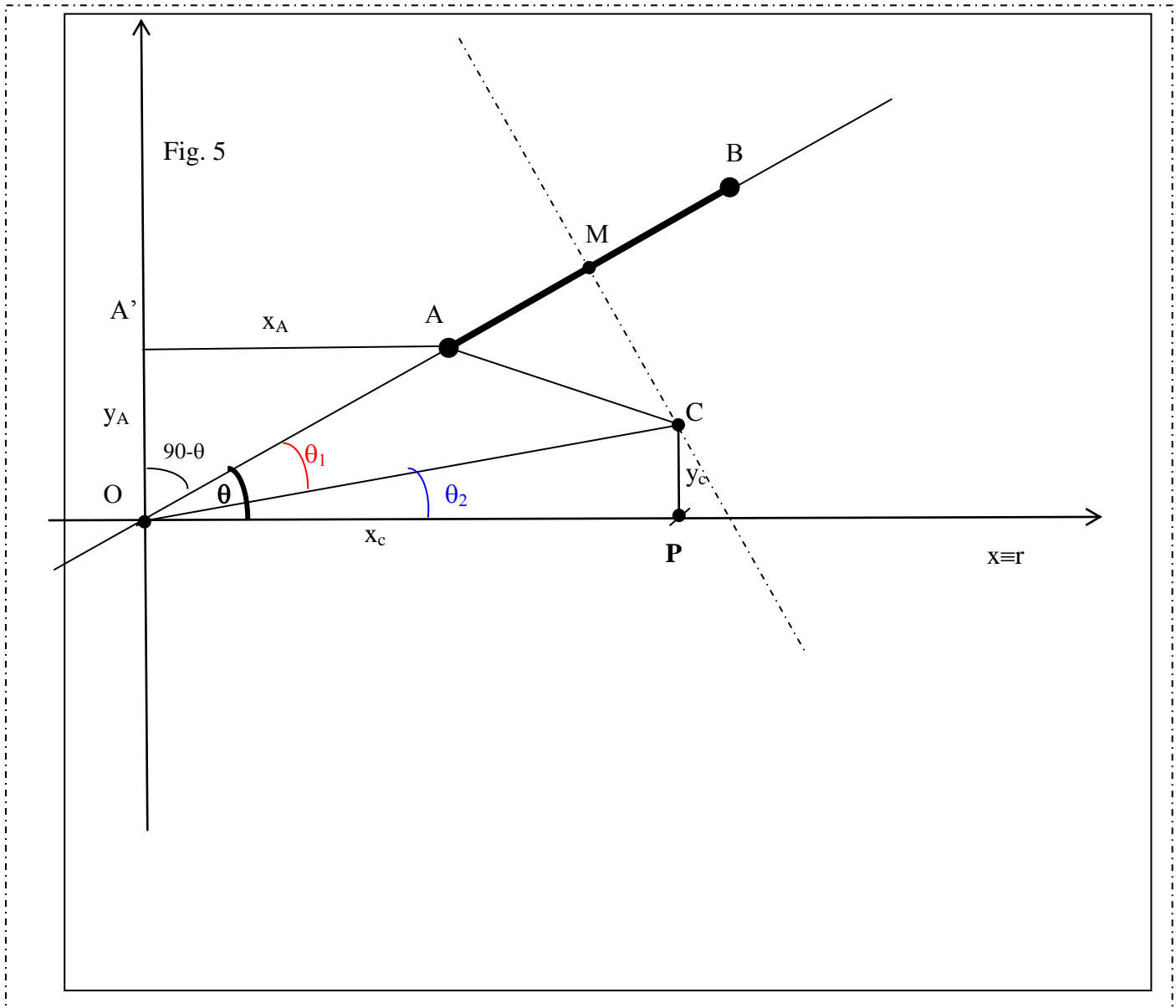
In conclusion, for all the above, to the Snellius tangent circle, and only to it, belongs the circumference angle α_{Max} , the maximum possible angle, given the two points A and B and a certain line r.

Per la localizzazione pratica del punto P di tangenza e quindi per la determinazione del corrispondente angolo massimo α_{Max} , oltre a soluzioni grafiche (tipo cercando con fini tentativi, il centro C_{Max} sull'asse del segmento AB e un raggio R tale che il cerchio capace su AB risulti anche, appunto, tangente alla retta r ovvero via specifica costruzione geometrica) qui a seguire si evidenzia una soluzione analitica, via opportune iterazioni e cioè, in pratica, via opportuno programma.

For the practical localization of the point P of tangency and then for the determination of the corresponding maximum angle α_{Max} , beyond graphical solutions (like searching with fine attempts, the centre C_{Max} on the axis of the segment AB and a radius R such as that the Snellius circle on AB results also, just, tangent to the line r or using the specific geometrical construction) here following is highlighted an analytical solution, through proper iterations, that is, practically, through a proper program.

A questo fine e al fine di poter usare formule date per un sistema di assi cartesiani, si assume la retta data r quale asse x e si assume come origine di questi, il punto O , intersezione della stessa retta col prolungamento convergente del segmento AB (Fig. 5)

To this purpose and in order to use formulas given for Cartesian axis, the given line r is assumed as x axis, and is assumed as its origin, the point O , intersection of the same line with the convergent prolongation of the segment AB (Fig. 5)



Innanzitutto, via triangolo rettangolo $OA'A$, rettangolo in A' , si calcolano le coordinate del punto A e cioè x_A e y_A ,

quindi si divide l'angolo di incidenza θ in due angoli θ_1 e θ_2 , facendo partire θ_1 da zero, quindi si fa incrementare θ_1 con un incremento ritenuto sufficiente per la precisione richiesta.

Per ogni angolo θ_1 si calcolano, via triangoli rettangoli OMC e OPC , rispettivamente rettangoli in M e P , le coordinate risultanti per il centro C del cercato cerchio capace tangente e si calcola, via rispettive coordinate cartesiane, la distanza CA , appunto fra il centro C e il punto A , assegnato come dato.

First of all, through the right-angled triangle $OA'A$, right-angled in A' , are calculated the coordinates of the point A , that is x_A and y_A , then the angle of incidence θ is divided in two angles θ_1 and θ_2 , and starting with θ_1 equal to zero, θ_1 is then increased with an increment considered sufficient for the required precision.

For each θ_1 are then calculated, through the right-angled triangles OMC and OPC , respectively right-angled in M and in P , the resulting coordinates of the centre C of the being searched tangent Snellius circle and is also calculated, through the respective Cartesian coordinates, the distance CA , between the centre C and the given point A

Nel dettaglio si hanno:

dal triangolo $OA'A$:

In details it results:

from the triangle $OA'A$:

$$\begin{aligned} x_A &= (OM - (AB/2)) \cos \theta \\ y_A &= (OM - (AB/2)) \sin \theta \end{aligned}$$

mentre

dal triangolo rettangolo OMC :

whereas from the right-angled triangle OMC :

$$1) \quad OM = OC \cos \theta_1 \rightarrow OC = OM / \cos \theta_1$$

mentre dal triangolo rettangolo OPC e usando il valore di OC ottenuto con la 1), si ottengono:

while from the right-angled triangle OPC and using the value of OC obtained with the 1), are then obtained:

$$\begin{aligned} x_c &= OP = OC \cos \theta_2 = OC \cos (\theta - \theta_1) \\ y_c &= CP = OC \sin \theta_2 = OC \sin (\theta - \theta_1) \end{aligned}$$

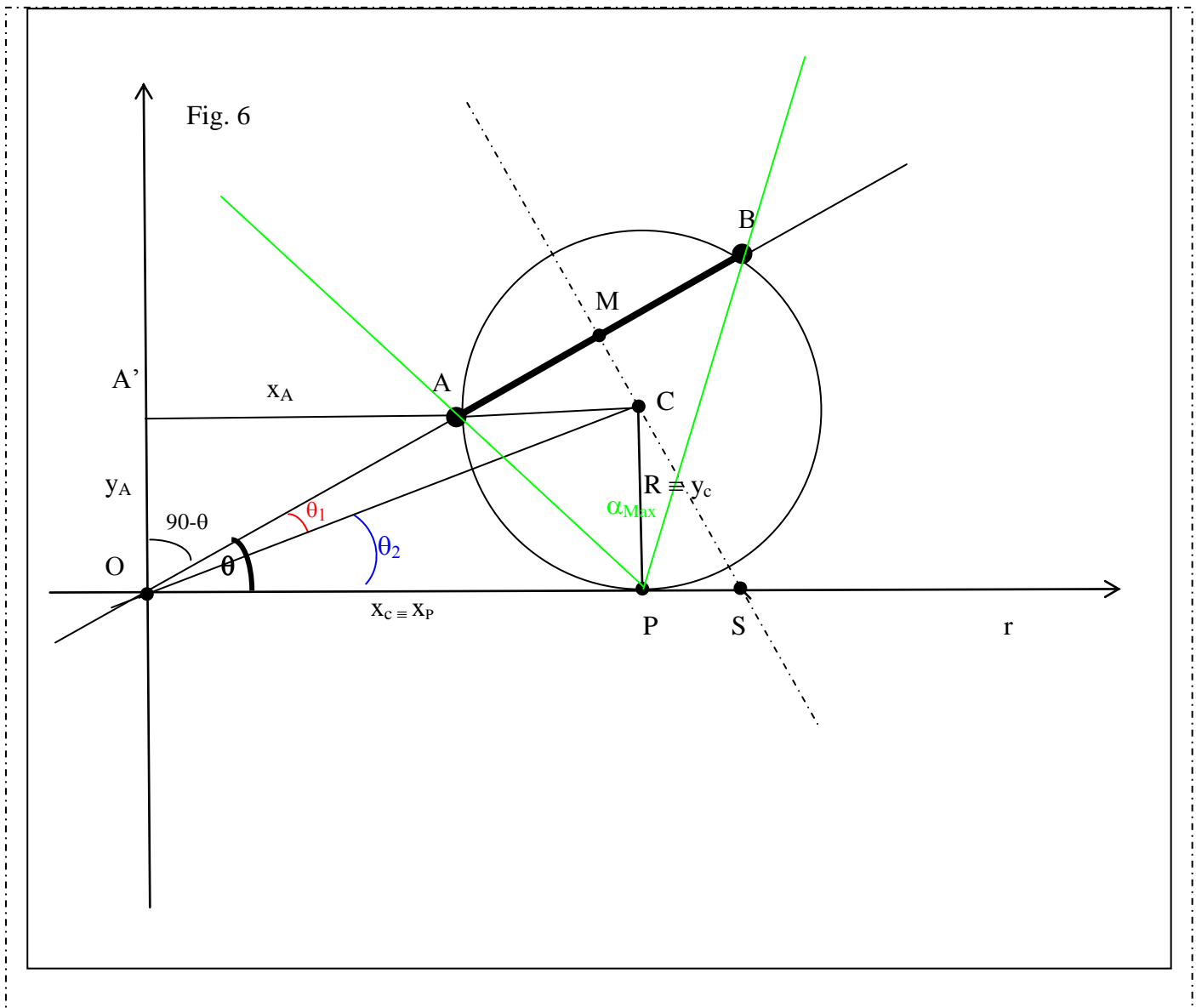
e, con la formula della distanza fra due punti:

and, with the formula between two points:

$$CA = \sqrt{[(x_c - x_A)^2 + (y_c - y_A)^2]}$$

Si considererà trovato il cerchio capace tangente, allorché per un certo angolo θ_1 , risulterà che l'ordinata $CP = y_c$ del centro C è eguale alla distanza CA . In questa condizione, infatti, risulta essersi materializzato proprio il cerchio capace tangente, di cui CP e CA sono due raggi, mentre la cercata ascissa del punto P di tangenza e cioè x_P , coincide con x_c (Fig. 6).

The tangent Snellius circle will be considered found, when, for a certain angle θ_1 , it results that the ordinate $CP = y_c$ of the centre C is equal to the distance CA . In this condition, in fact, it results to be materialized just the tangent Snellius circle, of which CP and CA are two radii, while the searched abscissa of the point P of tangency, that is x_P , coincides with x_c (Fig. 6).



Infine, col teorema della corda, applicato appunto ai punti dati A e B, quali estremi della corda AB del cerchio capace tangente, si potrà finalizzare la ricerca, calcolando anche il valore del' altresì cercato angolo massimo, avendosi:

Finally, with the cord theorem, just applied to the given points A and B, as extremes of the chord AB of the tangent Snellius circle, the search can be concluded, calculating also the value of the also searched value of the maximum angle, resulting:

$$\boxed{\angle APB = \alpha_{Max} = \arcsin(AB/2R)}$$

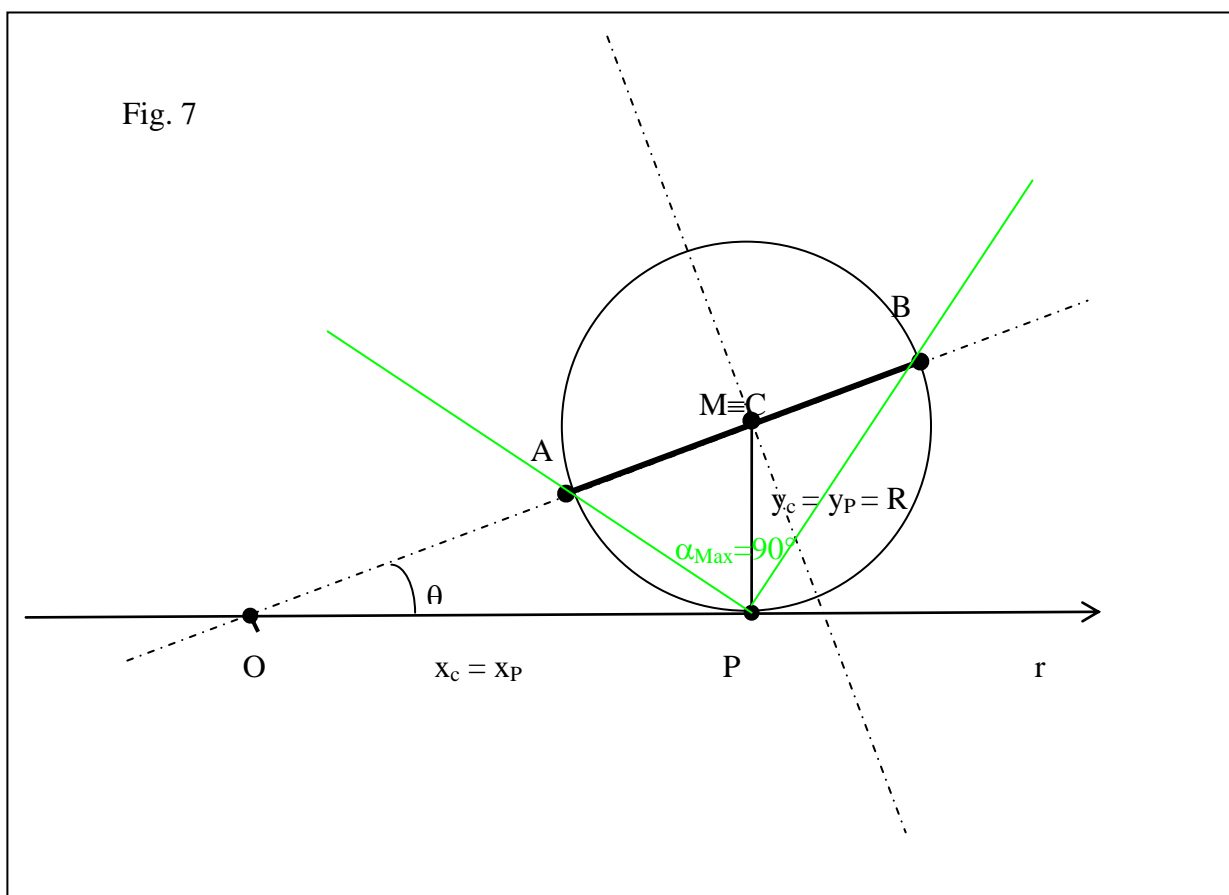
che, naturalmente, fornirà un $\alpha_{Max} < 90^\circ$

which, of course, will give an $\alpha_{Max} < 90^\circ$

Comunque tutte queste formule e relative iterazioni, rimangono applicabili fintantochè la corda AB, ad un certo avvicinamento della retta alla corda stessa (e precisamente quando risulta $OM \sin\theta = AB/2$), non diventi diametro del cerchio capace tangente, quando, naturalmente, l'angolo massimo α_{Max} risulterà essere di 90° mentre l'ascissa del punto P, di massimo angolo, risulta:

Anyhow, all these formulas and corresponding iterations, remain applicable till the chord AB, at a certain approach of the line to the same chord (and exactly when it results $OM \sin\theta = AB/2$), becomes a diameter of the tangent Snellius circle, when, of course, the maximum angle α_{Max} will result of 90° while the abscissa of the point P, of maximum angle, results:

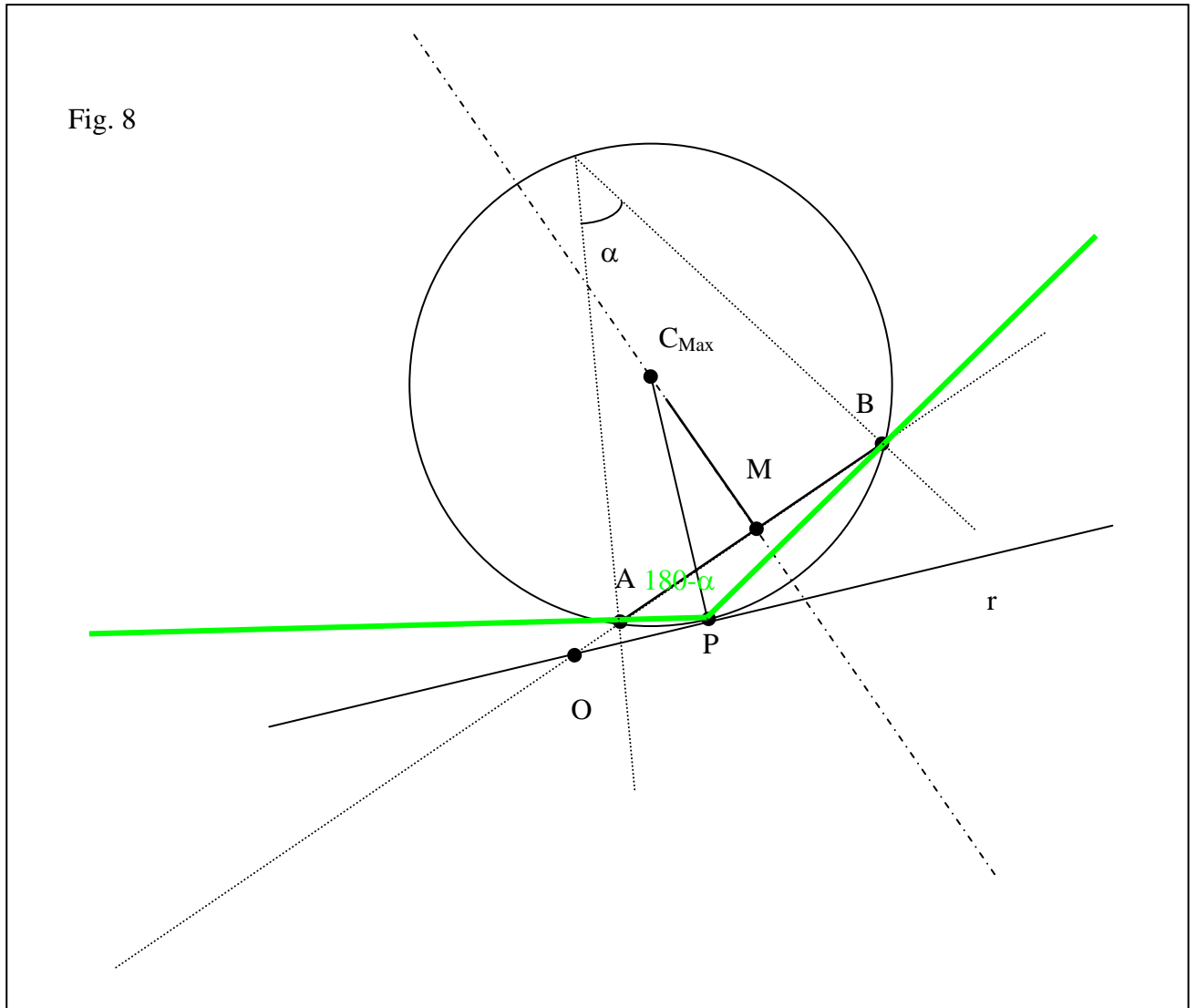
$$x_P = OM \cos \theta \quad (\text{Fig. 7})$$



Quindi, oltrepassata la condizione di diametro cerchio capace tangente eguale ad AB, si considereranno (in pratica per rette sempre più vicine ad AB) cerchi capaci tangenti appunto con centri oltre AB e cioè si considereranno gli archi di cerchi capaci tangenti non includenti il centro e quindi con angoli alla circonferenza, maggiori di 90° , supplementari rispetto ai corrispondenti angoli alla circonferenza della parte del cerchio capace tangente includente il centro. In questo caso, naturalmente, il cerchio capace tangente rappresenta quel cerchio capace il cui centro C_{Max} risulta essere il più lontano possibile dalla corda AB, anzicchè “il più vicino possibile”, di cui si parlava sopra (Fig. 8).

Then, beyond the condition of diameter of the tangent Snellius circle equal to AB, will be considered (practically for lines always closer to AB) tangent Snellius circles with centres just beyond AB, that is will be considered the arcs of the tangent Snellius circles not including the centre and therefore with circumference angles, larger than 90° , supplementary compared with the corresponding circumference angles of the part of the tangent Snellius circle including the centre. In this case, naturally, the tangent Snellius circle is just that Snellius circle whose centre C_{Max} results to be the farther possible from the cord AB, i.e. the exact contrary of “the closest possible” referred to, above (Fig. 8).

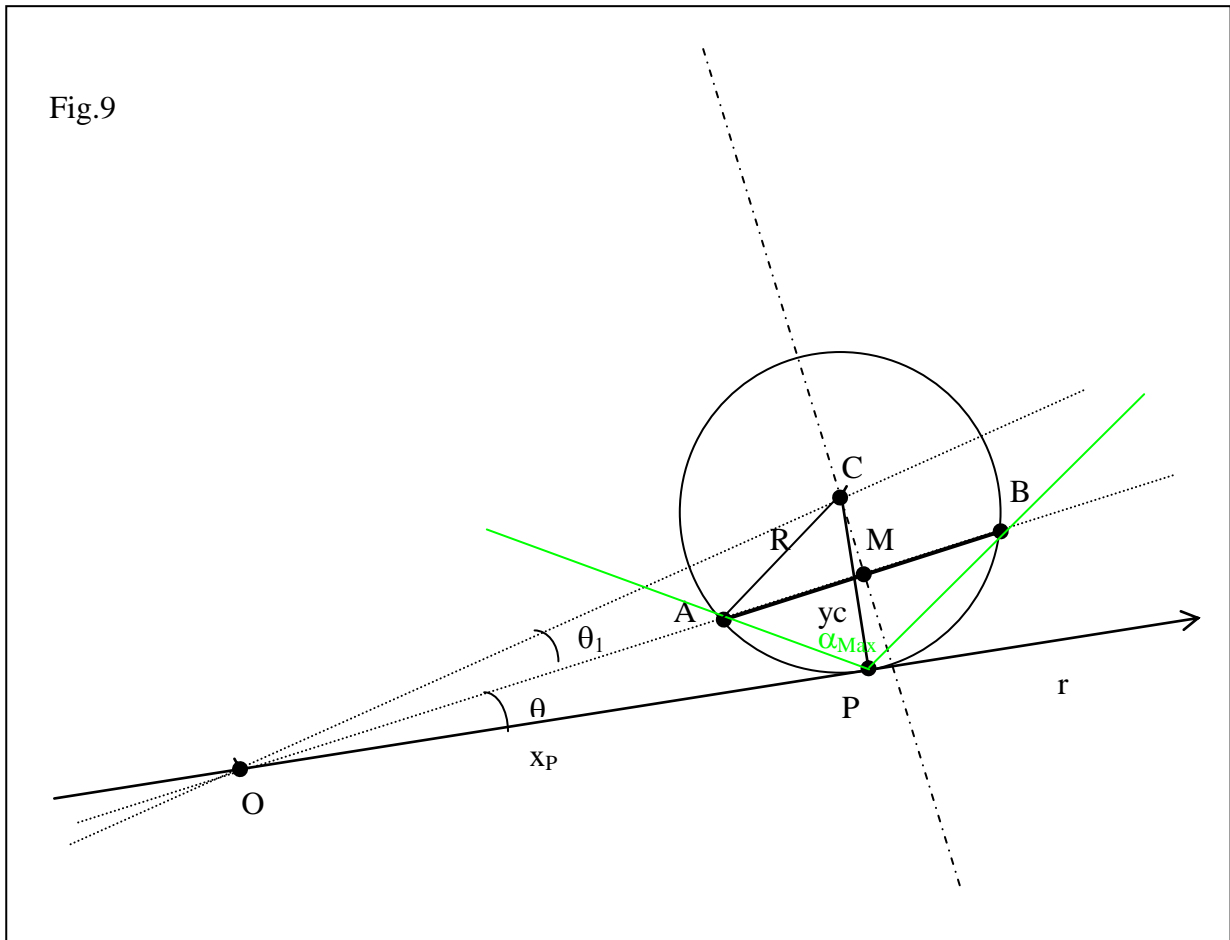
Fig. 8



Tutto ciò evidenziato, nel dettaglio, per i cerchi capaci tangenti con centri nell'arco opposto rispetto all'arco in cui si trova la tangenza, si evidenziano le seguenti formule ed iterazioni (Fig. 9):

All this evidenced, in details, for tangent Snellius circles with centres on the arc opposite to the tangency arc, are evidenced the following formulas and iterations (Fig.9):

Fig.9



Si itera via triangolo OMC, rettangolo in M, introducendo l'angolo θ_1 e facendolo incrementare da 0 a $90-\theta$, avendosi, per ogni iterazione che è:

The iterations are through the triangle OMC, right-angled in M and considering the angle θ_1 which from 0 is incremented till $90-\theta$, resulting, from each iteration that it is:

$$1) \quad \boxed{OC = OM / \cos \theta_1}$$

Mentre dal triangolo OPC, rettangolo in P, si ricavano per ogni θ_1 , e con quanto risultato dalla 1), le coordinate risultanti del centro C :

While from the triangle OPC, right-angled in P, are obtained for each θ_1 and with the result of the 1), the resulting coordinates of the centre C:

$$\boxed{x_C = x_P = OC \cos (\theta + \theta_1)}$$

$$\boxed{y_C = OC \sin (\theta + \theta_1)}$$

quindi, con le già calcolate le coordinate di A, anche qui si calcola la distanza CA e la si compara con y_C , mandando avanti le iterazioni fino a che il valore assoluto della differenza $y_C - CA$ sia minore di un certo valore ritenuto idoneo per la precisione richiesta e quindi fino a quando y_C e CA possono essere considerati raggi R dello stesso cerchio capace tangente.

Then, with the already calculated coordinates of A, also here is calculated the distance CA, for comparing the same with y_C and continuing the iterations till that the absolute value of the difference $y_C - CA$ is lesser than a certain value considered suitable for the required precision and, therefore till when y_C and CA can be considered radii R of the same tangent Snellius circle.

Infine, via angolo supplementare dell'angolo che si ottiene dal teorema della corda, si calcola l'angolo massimo α_{Max} , avendosi:

Finally, through the supplementary angle that is obtained with the cord theorem, is calculated the maximum angle α_{Max} , resulting that it is:

$$\boxed{\angle APB = \alpha_{Max} = 180 - \arcsin(AB/2R)}$$

Note:

i)

Nel caso particolare che i punti A e B determinano un segmento AB parallelo alla retta data r, allora il punto P di angolo massimo coincide con l'intersezione S dell'asse del segmento AB con la retta r,

mentre per l'angolo massimo risulta, dal triangolo rettangolo AMP, che è:

$$\boxed{\angle APB = \alpha_{Max} = 2 * \arctan(AM/PM)}$$

dove AM ed MP, sono dati (Figg 6 - 10)

Notes:

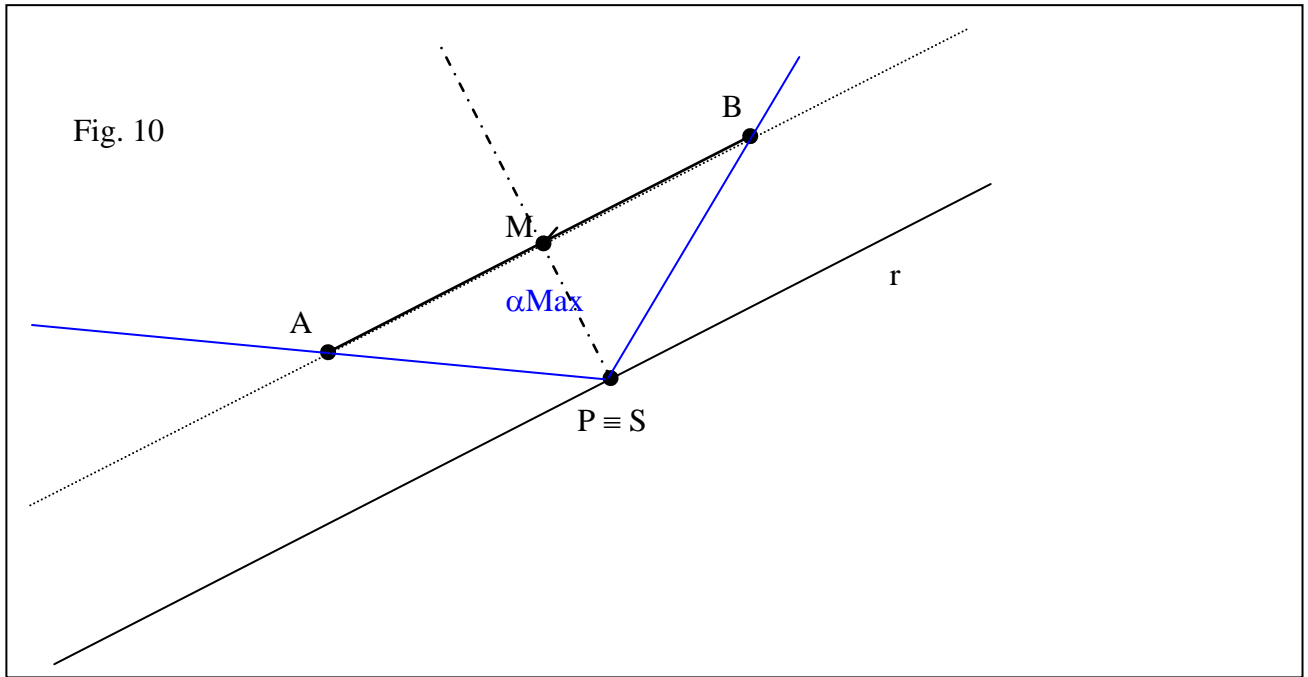
i)

In the particular case that the points A and B determine a segment AB which is parallel to the given line r, then the point P of maximum angle coincides with the intersection S of the axis of segment AB with the line r,

while for the maximum angle results, from the right-angled triangle AMP, that is:

$$\boxed{\angle APB = \alpha_{Max} = 2 * \arctan(AM/PM)}$$

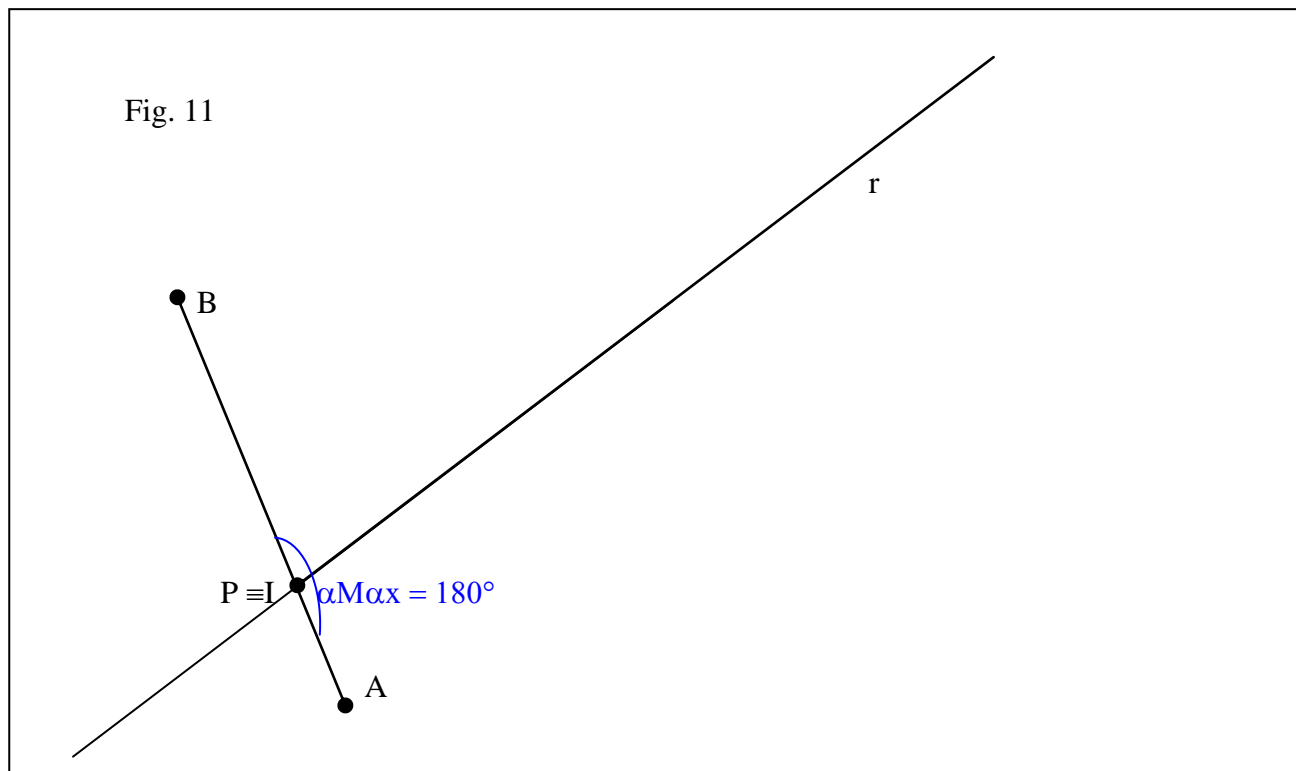
where AM and MP, are given (Fig 6 - 10)



ii)

Altro caso particolare è quando la retta interseca il segmento AB nel punto I. In questo caso è immediato che il punto P di massimo angolo della retta, risulta essere proprio il punto di intersezione I dove l'angolo AIB misura, ovviamente, 180° (Fig. 11)

Another particular case is when the line intersects the segment AB in the point I. In this case it is immediate that the point P of maximum angle, along the line, results to be just the intersection point I, where the angle AIB measures, evidently, 180° (Fig. 11)



Un programma per MAXANGLE via iterazioni

Presentazione

A program for MAXANGLE through iterations

Presentation

Come apertura, il programma chiede se la retta in questione interseca o no il segmento AB ed ad una eventuale risposta affermativa, ritorna e chiude con “ANGLE MAX 180° AT INTERSEZIONE”.

As opening, the program asks for whether the line on matter intersects or not the segment AB and, with affirmative reply, returns and ends displaying “MAX ANGLE 180° AT INTERSECTION”.

Se invece la retta non interseca AB, il programma richiede due inputs, AB e θ ma, se θ è 0 (situazione di parallelismo fra r ed AB), il programma richiede anche PM quale distanza fra retta e AB, ritornando subito il cercato ANGLE MAX e ricordando, altresì, che il punto della retta da dove si osserva con angolo massimo, è al traverso di M e cioè al traverso del punto medio del segmento AB.

On the contrary, if the line does not intersect AB, the program prompts for two inputs, AB and θ but, in case of θ equal to zero (condition of parallelism between r and AB), the program prompts also for PM, as distance between the line and AB, returning immediately the searched MAX ANGLE and evidencing that the point of the line from where it can be observed with maximum angle, is abeam of M, that is abeam of midpoint of segment AB.

Se invece θ è diverso da zero, dopo θ , il programma richiede la distanza OM e cioè la distanza tra intersezione della retta col prolungamento convergente del segmento AB ed M, come detto punto medio di AB e, per prima cosa, verifica se il cerchio capace tangente ha il diametro proprio eguale ad AB e, se è proprio questo il caso, ritorna immediatamente e chiude, visualizzando “ANGLE MAX 90°” e fornendo l’ascissa “XP”, fra O ed appunto il punto P della retta dove l’angolo è massimo ed eguale a 90°.

With θ different from zero, next to θ , the program prompts for the distance OM, that is for the distance from the intersection of the line with the convergent prolongation of the segment AB and M, that is as said the midpoint of AB and, this done, as first thing verifies if the tangent Snellius circle does have the diameter just equal to AB, and if this is the case, than returns immediately and ends, displaying “ANGLE MAX 90°”, showing also the abscissa “XP”, between O and the point P of maximum angle, equal to 90°, here being considered.

Quindi, se l’angolo massimo non risulta 90°, il programma continua e assumendo la retta come asse delle x ed O come suo origine, calcola le coordinate del punto A e stabilisce se l’arco cerchio capace tangente è del tipo includente o del tipo non includente il centro.

Then, if the maximum angle does not result 90°, the program continues and assuming the given line as line of x-axis and O as its origin, calculates the coordinate of the point A and determines whether the arc of the tangent Snellius circle is of the type including or of the type not including the centre .

A seguire, a seconda del tipo di arco capace, il programma avvia (e visualizza) una dei due tipi di iterazioni, naturalmente con un processo più o meno lungo, e va avanti fino a che non stabilisce - alla precisione prestabilita nel programma stesso - che è giunto ad individuare proprio il voluto cerchio capace tangente. E qui, naturalmente chiude fornendo l’ascissa del punto P nonché il valore dell’angolo massimo APB, appunto osservabile da P.

Thereafter, according the type of Snellius arc determined, the program starts (and displays) one of the two type of iterations, of course through a process more or less long and continues till to detect, with the pre-determined precision, just the wanted tangent Snellius circle. Here the program stop displaying both the abscissa of point P and the value of the maximum angle APB, just observable from P.

Vien da se che, oltre alle qui proposte iterazioni via programma, per l’individuazione analitica di x_P ed α_{Max} potranno essere seguiti altri approcci, come la determinazione dell’equazione della circonferenza (ovvero qui, dell’equazione del cerchio capace tangente) dati i due suoi punti A e B e data l’equazione della retta r ad esso tangente, e, dunque, assumendo la retta r come asse delle ascisse, come su detto, data l’equazione $y=0$.

Quindi, dall’equazione del cerchio capace tangente, ricavare sia l’ascissa di tangenza e cioè appunto la x_P (imponendo nell’ equazione determinata, $y=0$), sia il raggio del cerchio capace tangente e da questi, infine, risalire, col teorema della corda, ad α_{Max} .

It goes without saying that, besides the iterations through program here proposed, for the analytical determination of x_P and α_{Max} are available other approaches as the determination of the equation of the circumference (that is here, the determination of the equation of the tangent Snellius circle) given the two its points A and B and given the equation of the line r, tangent to it, and, therefore, assuming the line r as x-axis, as above said, given the equation $y=0$.

Then, from the determined equation of the tangent Snellius circle, deduce both the abscissa of the tangent point, that is the x_P (imposing $y=0$ into the equation) and the radius of the tangent Snellius circle and with the radius, finally, through the cord theorem, calculate α_{Max} .

Programma MAXANGLE

Istruzioni per una TI-82

Program MAXANGLE

Instructions for a TI-82

```
:ClrHome
:Degree
:Fix 2
:Input "R X AB? If Yes, Input 1",W [for asking whether or not the line r intersects the segment AB]
:If W=1
:Goto 1
:Input "AB=",A
:If A>999
:Stop
:Input "θ DGR=",θ
:If θ=0
:Goto2
:Input "OM=",M
:If abs(Msin θ - A/2)< 0.001
:Then
:Disp "ANGLE MAX= 90°"
:Disp "XP=", Mcos θ
: Stop
:End
:(M-A/2)cosθ→X
:(M-A/2) sinθ→Y
:If Msin θ <A/2
:Goto3
:For(J,0,θ,0.01)
:M/cos J→I
:I cos (θ-J)→L
:I sin (θ-J)→N [calculation of yC ]
:√((L-X)^2 + (N-Y)^2)→P [calculation of the distance CA]
:If abs (N-P) < 0.005 [in the case of "Err. Domain", the value to be decreased, conveniently]
:Goto 4
:Disp "Iteration type 1=", abs (N-P)
:End
:Lbl 4
:Disp "XP=", L
:sin^-1 (A/2N)→Q
:Disp "ANGLE MAX DGR=", Q
:Stop
:Lbl2
:Input "PM=",T
:2 tan^-1 ((A/2)/T)→Q
:Disp "ANGLE MAX=", Q
```

```

:Disp "ABEAM M"
:Stop
:Lbl 1
:Disp "ANGLE MAX DGR= 180"
:Disp "AT INTERSECTION!"
:Stop
:Lbl 3
: For (J,0,90-θ,0.005)
:M/cos J→I
:Icos (θ+J)→L
:Isin (θ+J)→N [calculation of yc ]
:√((L-X)2 + (N-Y)2)→P [calculation of the distance CA]
:If abs (N-P)<0.005 [in the case of "Err. Domain", the value to be decreased, conveniently ]
:Goto 5
:Disp "Iteration type 2=", abs (N-P)
:End
:Lbl 5
:Disp "XP=", L
: sin-1 (A/2N)→Q
:180-Q→Q
:Disp "ANGLE MAX DGR=", Q
:Stop

```

Esempi numerici di controllo programma MAXANGLE, riscontrati graficamente
Numerical examples for controlling MAXANGLE program, verified graphically

i) - Parallelismo fra retta e segmento AB - **Parallelism between the line and the segment AB**

Inputs:

AB= 5.8 / θ= 0 / PM= 4.3

Outputs:

ANGLE MAX= 67.99 / ABEAM M

ii) - Angolo massimo = 90° - **Maximum angle = 90°**

Inputs:

AB= 16 / θ= 30 / OM= 16

Outputs:

ANGLE MAX 90° / XP= 13.86

iii) - Iterazioni (tipo 1) per centro incluso nell'arco capace tangente -
Iterations (type 1) for centre included into the tangent Snellius arc

Inputs:

AB=8.25 / θ=27.2 / OM= 14.75

Outputs:

XP= 14.16 / ANGLE MAX= 61.01

iv) - Iterazione (tipo 2) per centro non incluso nell'arco capace -

Iterations (type 2) for centre not included into the tangent Snellius arc

Example 1

Inputs:

AB=15.15 / θ =20 / OM = 20.8

Outputs:

XP= 19,37 / ANGLE MAX = 93.39

Example 2

Inputs:

AB= 9.6 / θ =17.5 / OM = 15.2

Outputs:

XP= 14.42 / ANGLE MAX = 91.76

ADDENDA

Con gli stessi dati di cui sopra (una retta e due punti A e B esterni a questa), risulta altresì che il punto della retta in cui è minima la somma delle sue distanze dai punti A e B è il punto E, di tangenza dell'ellisse avente come fuochi proprio A e B ed appunto tangente alla retta in E.

Qui, naturalmente, va ricordato che l'ellisse è il luogo dei punti in cui è costante, per l'appunto, la somma delle loro distanze da due punti fissi, detti fuochi. Si evidenzia, comunque che questo punto E di tangenza altro non è che il punto del teorema di Erone, sullo stesso problema.

In questo caso, come applicazione concreta, si potrebbe immaginare l'individuazione del punto E, lungo un oleodotto rettilineo, dove creare una stazione di distribuzione del petrolio, appunto verso due punti utilizzatori A e B. Naturalmente nel punto E, si minimizzerebbero i costi totali per la costruzione degli oleodotti EA e EB essendo la somma delle loro lunghezze la minima possibile, con una sola stazione.

With the above same data (a line and two points, A and B, external to this line), it also results that the point of the line in which is minimum the sum of its distances from the point A and B is the point E of tangency of the ellipse having as focuses A and B and just tangent to the line in E. Here, naturally, one has to recall that the ellipse is the locus of the points in which is just constant the sum of their distances from two fixed point, called focuses. Anyhow, it is highlighted that this point E, is just the Erone theorem point, on the same problem.

In this case, as practical application, one can imagine the localization of the point E, along a straight pipeline, where create a distribution station for supplying oil to the user points A and B. Of course in the point E, the total construction' costs of the pipelines EA and EB should result the minimum possible, being at minimum the sum of their lengths, with only one station.

Date: 6 Aug. 2015

G. Russo