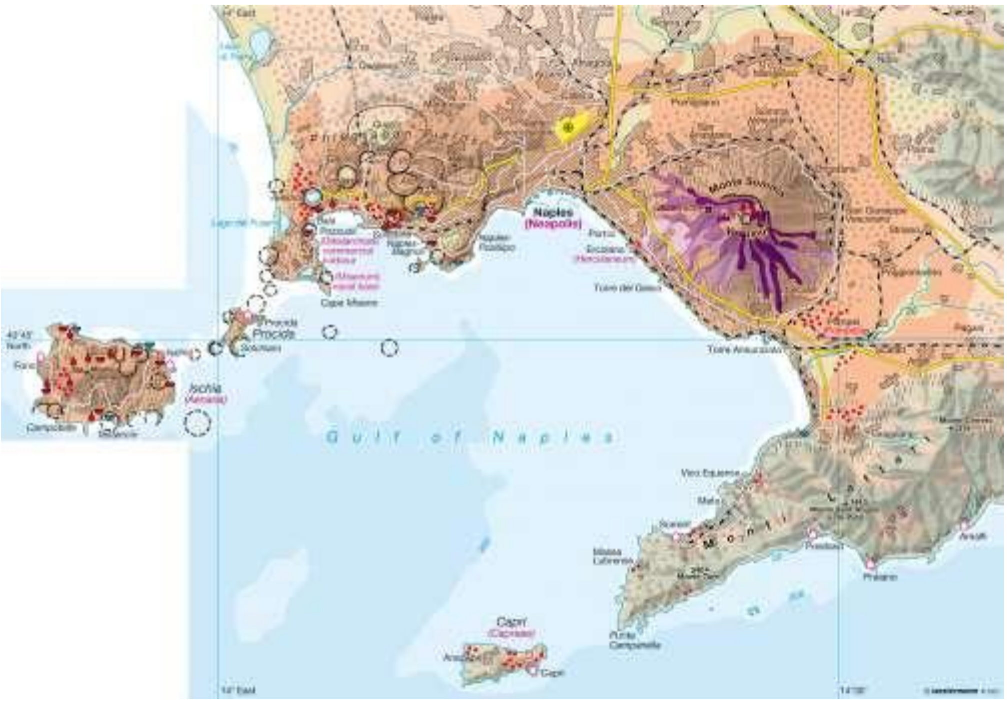
Il Punto dell’angolo massimo
(Parte I)

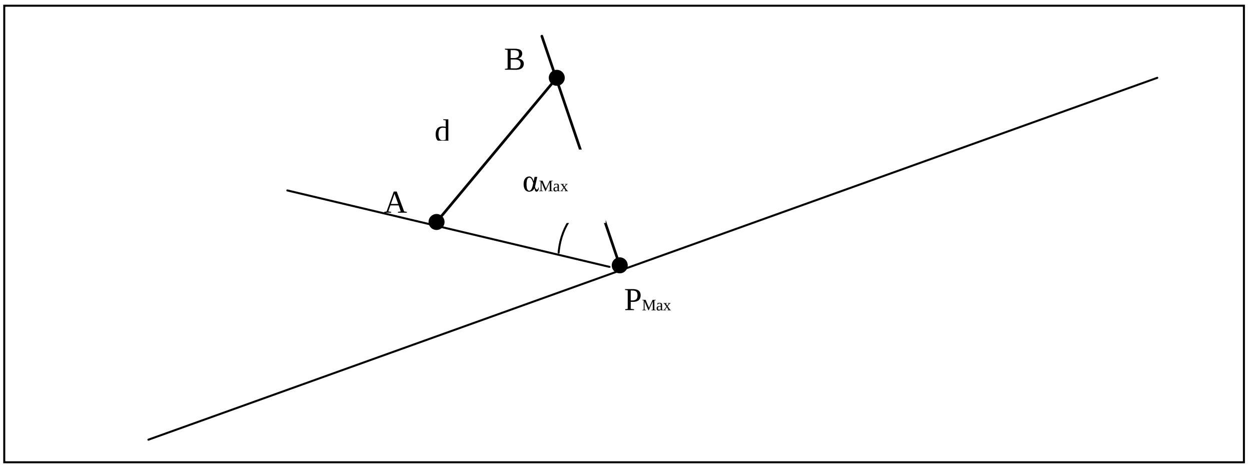
Il pendolare ha la fortuna di poter osservare una certa cosa con una certa accuratezza, infatti può osservarla tutti i giorni, andando e ritornando dal suo lavoro.

Pendolando da Sorrento a Napoli e viceversa, sia col pullman che col treno, si possono osservare le isole di Capri ed Ischia.
In particolare, osservando il Golfo di Napoli da Mergellina, Ischia si confonde con la terraferma mentre, dal lato opposto, in direzione di Sorrento, l’isola di Capri, ad un certo punto, non si vede più perché viene coperta dal Capo di Sorrento, lasciando alla vista la sola isola d’Ischia, sicchè qualche turista, disorientato, chiede, mostrandola sulla sua mappa, ‘ma dov’è l’isola di Capri?’
Naturalmente il turista viene subito tranquillizzato che Capri c’è ancora ed ‘è dietro a quella punta’.
Il turista allora ringrazia ma rimane perplesso e forse anche deluso perché ora immagina che Capri, alla faccia della sua grande fama, sia in effetti poco grande, appena uno scoglio, che si fa coprire da una puntina !

Ma ritornando al pendolare, più o meno assonnato o stanco, quando di ritorno, nei punti intermedi del suo viaggio, vede le due isole ora più vicine ora più lontane.
Naturalmente deve trattarsi di qualche gioco di visuale, che la distanza minima tra le due isole è quella che è e cioè 15 miglia nautiche, tonde, tra Punta Vitareta a Capri e Punta San Pancrazio ad Ischia.



‘E allora? Qui voglio vederci chiaro, una volta e per tutte’, dice il pendolare a se stesso.
E si mette a ragionare ed ad osservare meglio, decidendo, definitivamente, che tra le stazioni di Leopardi e Villa delle Ginestre della Circumvesuviana, lì, da qualche parte, le punte dirimpettaie delle due isole, cioè appunto le dette punte più vicine, dovevano risultare il più allargate possibile ovvero doveva risultare massimo l’angolo Punta Vitareta di Capri – lui medesimo, pendolare, sul treno – e Punta San Pancrazio ad Ischia. Naturalmente se questo punto di massimo allargamento fosse stato effettivamente determinato “ matematicamente”, allora, arzigogolava il viaggiatore, da questo punto si sarebbe potuto osservare uno specchio di Mar Tirreno, il più ampio possibile! Un punto tipo di massimo panorama o di migliore vedetta, visto i tempi “di sbarchi” che correvano!
Ma dov’era esattamente questo punto di massimo panorama, ed esisteva davvero un punto di massimo panorama? E se sì, sarebbe stato lo stesso punto sia sul pullman che sul treno?
Via pullman, al pendolare, sembrava che il punto di massimo allargamento, si trovasse un po’ più verso Napoli, quasi a Torre del Greco!
‘E allora ?’
E finalmente si decise di prendere “carta e penna” e cercare di chiarire i termini esatti del suo problema.
Intanto, forse, pensava il pendolare, se in un piano sono dati due punti A e B ed una retta , con A e B non appartenenti a questa retta, allora fra gli infiniti punti della retta, ce ne era uno speciale, il punto P_{Max}, in cui l’angolo APB (α) era il massimo possibile, ovvero era α_{Max}! Ma pensava anche che forse su una retta potevano esserci più punti di massimo angolo, sebbene vicini. Di sicuro, a mano a mano che ci si allontanava dai punti A e B, l’angolo APB diventava sempre più piccolo.
‘Ovviamente!’

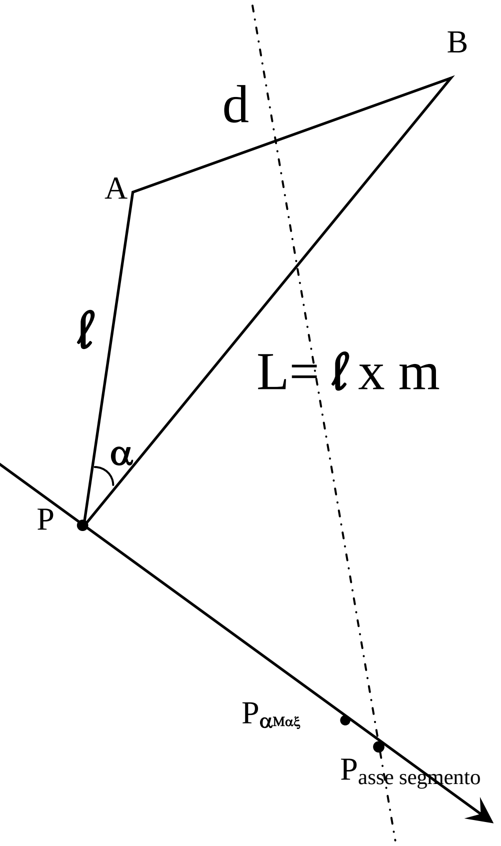


Quindi, continuò il pendolare, ‘qui, essendo coinvolto un massimo o dei massimi, sarà certamente una questione di una certa funzione! Ma quale funzione ? Chi se le ricorda più le funzioni! Dopo tanti anni!’, quasi prendendosela con se stesso.

Ma il concetto cruciale di funzione e la quasi soluzione del problema furono improvvisamente interrotti dall' interfonico del treno che, alla fermata di Napoli Garibaldi, dava il buongiorno a tutti, il buon lavoro ai lavoratori e il buon studio agli studenti e faceva scattare il pendolare che afferrava le sue cose e scendeva prima che il treno chiudesse le porte e ripartisse per il quasi lì attaccato terminale di Napoli P. Nolana.

* * *

Per fortuna Agosto era passato e il pendolare riprese a prendere il più comodo pullman. Più comodo se non c'erano scioperi dei treni o cattivo tempo di mare quando anche il pullman diventava stracolmo e quindi diventava una vera sofferenza per chi era riuscito ad entrarci.
Ma quel 4 Settembre, compleanno del pendolare, era proprio un suo giorno fortunato, infatti nel pullman era tutto perfetto e nella mente gli appariva la soluzione del suo problema, su un piatto d'argento!
Infatti, eureka! Sì, nel triangolo APB doveva esserci la funzione che avrebbe determinato l'angolo massimo in P_{Max}. E i triangoli, da sempre, erano le figure geometriche preferite dal pendolare.
Naturalmente ci volevano di nuovo carta e penna! Ma anche righello e goniometro, per verificare graficamente quello che da lì a poco, sentiva, avrebbe "scoperto"! Forse, addirittura, un nuovo teorema! " Data una retta e due punti …", già immaginava, orgoglioso, l'enunciato di questo suo teorema.
E quella mattina i miracoli sembravano non finire mai, che si succedevano uno dietro l'altro:
il teorema di Carnot , quello del coseno, era uno di questi, infatti andava a suggerire al pendolare proprio la soluzione del problema appunto su di un piatto d'argento: chiamando d la distanza tra i punti dati A e B, chiamando poi ℓ [elle piccolo] il lato piccolo del triangolo APB e indicando con L grande appunto il lato grande dello stesso triangolo (imponendo $L = \ell \times m$, essendo m un moltiplicatore) allora, semplificando, il coseno di α risultava essere la somma di due addendi funzione di m e di un sottraendo inversamente proporzionale al prodotto $\ell \times L$. Ora siccome m "<u>sarebbe stata</u>" una costante, il pendolare concludeva che il coseno di α si minimizzava (e conseguentemente α si massimizzava) quando risultava minimo il prodotto $\ell \times L$.
E quando il prodotto $\ell \times L$ era minimo? In quale occasione geometrica questo sarebbe avvenuto? Non era con P al perpendicolo di A o B né quando P era a 90° dal punto medio fra A e B…bingo! eureka! Il punto P_{Max} risultava quando ℓ piccolo era eguale ad L grande e cioè quando il loro prodotto era esattamente l'unità, quand'era 1, e ciò avveniva quando P passava per l'intersezione dell'asse del segmento AB con la retta in considerazione!



Per teorema di Carnot, è:

$d^2 = \ell^2 + L^2 - 2\,\ell\,L \cos\alpha \rightarrow$

$2\,\ell\,L \cos\alpha = \ell^2 + L^2 - d^2 \rightarrow$

$\cos\alpha = (1 / 2\,m) + (m / 2) - (d^2 / 2\,\ell\,L)$

NB
Naturalmente m non è costante (infatti, per esempio, è >1 in P ed = 1 in $P_{\text{asse segmento}}$) e quindi l'equazione conclusiva data per cos α è sbagliata

'Che bello, sono proprio felice e allegro come non mai', si diceva il pendolare mentre salutava, una tantum, un po' tutti i suoi compagni di viaggio, a mano a mano che si portava verso l'uscita anteriore del pullman, per scendere alla sua fermata di Piazzale Tecchio, vicino al Commissariato San Paolo a Fuorigrotta.

Purtroppo, impietosamente, le verifiche grafiche che il pendolare effettuò a casa sua nel successivo weekend, smentirono che P_{Max} col suo α_{Max} fossero nel punto $\ell = L$, cioè quando il triangolo APB risultava essere un triangolo isoscele. Chissà, allora, dov'era o dov'erano questi punti! Le verifiche grafiche ne davano uno e proprio lì vicino al punto del triangolo isoscele e il pendolare, sconsolato, abbandonò il suo problema.

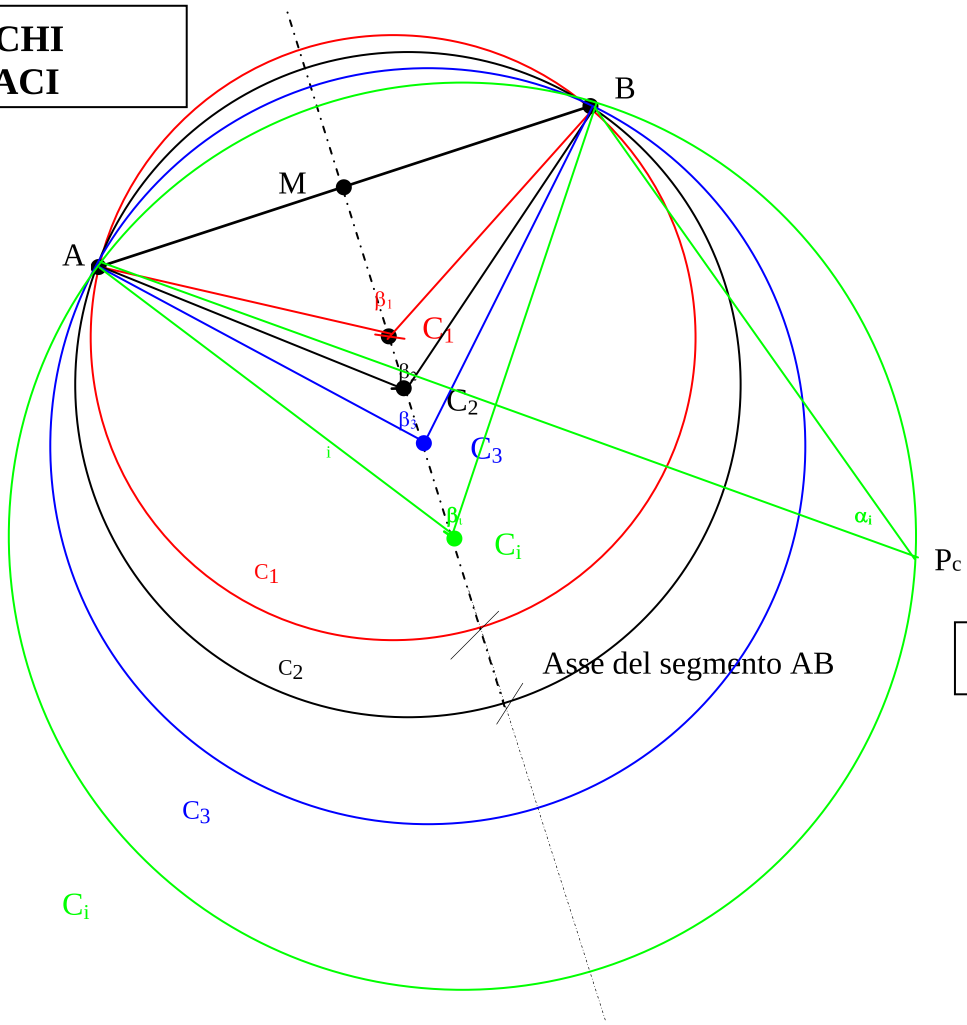
Ma il problema non abbandonò lui.

Infatti, da lì a qualche settimana, a metà Settembre, lo andò a trovare nella sua stanza del Golden Anchor hotel di Paradip, nello stato di Orissa, India, dove il pendolare , ora in trasferta, si trovava ad attendere una nave che tardava ad entrare in porto. E siccome nell'hotel e fuori nella fitta vegetazione, c'era ben poco da fare, al pendolare la visita del suo problema fu proprio benvenuta,

proprio un ottimo passatempo, e poi non si sa mai. Che chi la dura la vince e ancora una volta con carta, penna, righello e goniometro, riprese la sua ricerca di P_{Max} e α_{Max} .
Ma questi resistevano, eccome resistevano, non venivano fuori, nonostante cercati ostinatamente.
Eppure c'erano, erano lì sulla carta, ma a cosa corrispondevano, esattamente! Come si stabilivano esattamente?
'Anche oggi, niente di niente', diceva il pendolare a se stesso, accingendosi a scendere per la sua passeggiata serale per il vialone alberato, verso il faro, fino al piccolo zoo marine, a fine vialone.

E fu proprio durante una di queste silenziose passeggiate che al pendolare vennero alla mente i cerchi capaci.

CERCHI CAPACI



$\alpha_i = \frac{1}{2} \beta_i$

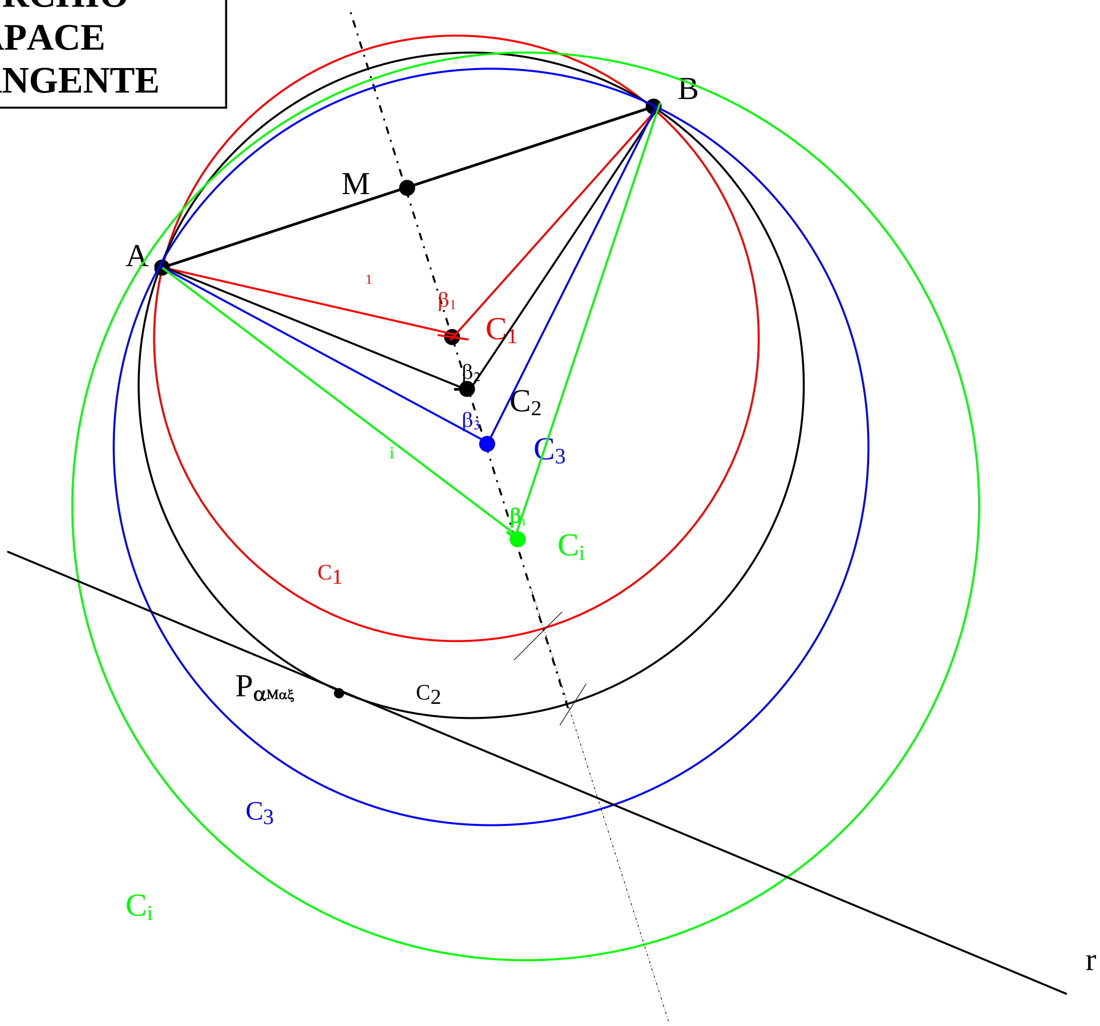
Si ricorda che:
- che i cerchi capaci sono appunto gli infiniti cerchi aventi il proprio centro C sull'asse del segmento AB e tali che il segmento AB ne rappresenta una corda che li divide in due parti: quella includente il centro e, appunto, quella non includente il centro,
- che la loro caratteristica è che da tutti i loro punti P_c (per la parte di cerchio non includente il centro) si osserva la corda AB sotto uno stesso specifico angolo alla circonferenza α_i che naturalmente sarà la metà del corrispondente angolo al centro $\boldsymbol{\beta_i}$**.**
- che, a mano a mano che i centri C dei cerchi capaci si allontanano da M, base dell'asse del segmento AB, i relativi angoli alla circonferenza – e di conseguenza i corrispondenti angoli al centro – diventano sempre più piccoli

‘Vuoi vedere che sono proprio loro la chiave per aprire P_{Max} e α_{Max}? D’altronde i cerchi capaci sono relativi ad angoli e α_{Max} è appunto un angolo ’, pensava l’uomo.
E senza neanche soffermarsi a comprare il suo solito pacchettino di dolcetti locali, rientrò subito in hotel, dritto nella sua camera 214 e dritto ai suoi disegni delle verifiche grafiche.
E puntando a tentativi il compasso sull’asse del segmento AB e, sempre a tentativi, allargando e chiudendo, pian pianino, lo stesso compasso e cioè variandone il raggio, trovò alla fine un cerchio che passava proprio sul suo punto P_{Max} ; punto che aveva trovato in precedenza, sempre a tentativi, misurando gli angoli in stretta sequenza. ‘E già! Era il cerchio capace tangente, la soluzione!’, si auto congratulava il pendolare.
Ma subito ricontrollò, memore della precedente delusione! Ma questa volta era proprio così!
Rimase a guardare fisso il foglio, poi alla fine lo sfiorò con un dito e qui si accorse che era tutto sudato e che fuori era notte fonda, senza più una luce accesa nei paraggi. Ma com’era bello essere felice, sebbene gli fu chiaro da subito che anche ‘i figli della mente’ dovevano essere accuditi amorevolmente, se ne doveva essere responsabili!, esattamente proprio come i figli della carne!’. ‘E i mie figli, adesso hanno un nuovo fratello!’
‘Ma forse sto esagerando!’ pensò esausto il pover’uomo, spegnendo la luce ma rimanendo insonne.
E, manco a dirlo, le sue responsabilità lo chiamarono subito all’ordine, immediatamente, quella stessa notte o meglio quella stessa mattinata che già fuori era chiaro.
‘Perché?’ ‘Perché proprio e solo il cerchio capace tangente era il determinante di P_{Max} e quindi anche il determinante del corrispondente α_{Max} ?’
Il pendolare era chiamato a sostanziare le sue affermazioni. E quindi doveva, intanto, escludere che il suo fatto grafico non fosse stato una semplice coincidenza o una banale approssimazione, bensì essere proprio la soluzione analitica al problema! Doveva mostrare che P_{Max} e α_{Max} non erano la solita bufala di un qualsiasi “matematico” della domenica! ‘ Tutt’altro!’, si rispose stizzito.‘Farò vedere io che P_{Max} e α_{Max} sono proprio dei nuovi genuini frutti della mente!’ ‘Ci mancherebbe altro!’ mentre già tentava di scacciare dubbi, che intanto gli si aggiravano intorno, sempre più numerosi e minacciosi e sobbalzò nel letto al dindin del campanello, che aveva dimenticato di mettere fuori alla porta il cartellino di ‘Do Not Disturb’ ed ora le signore delle pulizie bussavano, appunto, per entrare e farle …

Nonostante oggi l’India sia diventato un paese ricco con diffuso benessere, naturalmente c’è ancora chi chiede:
‘Good evening Sir! Which is your nationality?, Sir!’ chiesero al pendolare, appena uscito dall’atrio dell’hotel, due giovinetti in bici, ben curati ed evidentemente scolaretti a passeggio.
‘Hello, I am an Italian!’ e i due, subito , all’ unisono, ‘Have you some coins of your country, for our collection?’. ‘I will check, I will go up and back down, soon’,’Thanks Sir’ ritornarono i ragazzi, scendendo definitivamente dalle loro biciclette, per aspettare.
Il nostro trovò nel suo portamonete, proprio 2 monetine da 50 centesimi di euro “d’oro”, belle nuove e le portò giù ai ragazzi, che le presero a volo e schizzarono via, belli come angeli!
Il pendolare li seguì con lo sguardo allontanarsi nel vialone alberato, ma in direzione opposta rispetto al faro e prese anche lui quella direzione mai seguita prima, sperando di re-incontrare quei ragazzi e scambiarci ancora qualche altra parola. Ma incontrò solo qualche pedone come lui, altri ciclisti, qualche mucca e qualche coppia sfrecciante in motorino. E decise di far ritorno in hotel che imbruniva. ‘Up and down’ si ripetette. Si ‘up and down’. Perché non ci aveva pensato subito!
Il commento dei cerchi capaci “up” contro i cerchi capaci “down” avrebbe senz’altro fornito una spiegazione esaustiva del perché era proprio il punto di tangenza di un cerchio capace, il punto dell’angolo massimo cercato.

‘Certo!’ si diceva il pendolare. ‘I cerchi capaci insistenti su un certo segmento AB hanno angoli al centro e quindi gli angoli alla circonferenza, crescenti a mano a mano che i loro centri C si avvicinano ad AB. Dunque si hanno cerchi capaci down, interni, fra segmento AB e retta, questi hanno grandi angoli, ma non interessano perché non intersecano la retta mentre i cerchi capaci Up, quelli esterni, hanno angoli piccoli ed intersecano la retta in due punti.’. ‘ Ma noi si cerca angoli grandi!’
‘Bingo, finalmente!’. ‘Ovviamente il cerchio capace tangente’ indicava nel suo punto di tangenza con la retta, il punto P_{Max} e con esso il corrispondente α_{Max}’. Gli angeli! …

CERCHIO CAPACE TANGENTE



NB
Una cerchio capace di tipo C_1 (interno/down nei confronti della retta r e quindi non interessante la retta in questione) ha angoli alla circonferenza e al centro maggiori rispetto a cerchi capaci di tipo C_3 (esterni/up a 2 intersezioni con la retta r) e dunque, consegue, che il cerchio capace di angoli alla circonferenza e al centro massimi possibili ed interessante la retta r, è quello di tipo C_2, tangente alla retta nel punto $P_{\alpha M\alpha\xi}$

*　　*　　*

Il treno aspettava la coincidenza a Leopardi, ma il pendolare, dal suo posto, non vedeva nè Ischia nè Capri, naturalmente sapeva che erano là fuori ed ora sapeva anche del punto dell’angolo massimo, nei paraggi, alla tangenza . Ma sapeva trovarlo solo graficamente quel punto.
Non sapeva ancora trovarlo via calcoli.

18 Settembre 2015　　　　　　　　　　　　　　G. Russo