

Esame di Stato 2015 - Tema di Matematica

PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione.

Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.

Spesa mensile

Costruzione del modello. La relazione che descrive la spesa mensile in funzione dei minuti di conversazione è data dalla legge

$$f(x) = 10 + 0,10x \quad x \in N \quad 0 \leq x \leq 43.200$$

naturalmente la variabile è discreta, quindi si tratta di una sequenza finita di valori (grafico Fig.1).

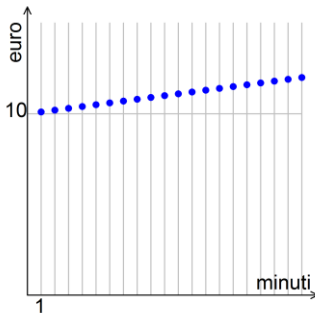


Fig.1

Interpretazione del modello: la spesa ha un costo fisso (corrispondente a 0 minuti di conversazione) ed è una funzione *crescente* del tempo di conversazione.

Osservazione. Continuando a denotare con $f(x)$ la funzione *supporto* a variabile continua, risulta

$$f(x) = 10 + 0,10x \quad x \in R \quad 0 \leq x \leq 43.200$$

f è una funzione lineare il cui grafico è riportato in Fig.2 e Fig.2'

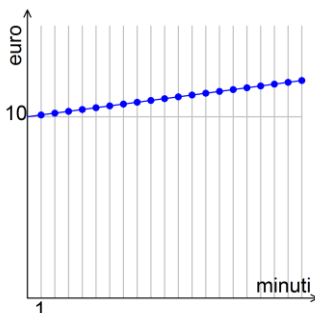


Fig.2

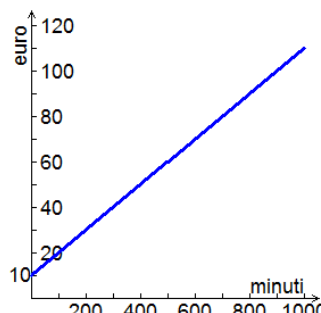


Fig.2'

Costo medio

Costruzione del modello. Il costo medio al minuto per x minuti di conversazione è definito dal rapporto

$$\frac{\text{costo conversazione}}{\text{durata conversazione}} = \frac{f(x)}{x}$$

ed è rappresentato dalla sequenza finita (vedi grafico in Fig.3)

$$g(x) = \frac{10}{x} + 0,10 \quad x \in N \quad 0 < x \leq 43.200$$

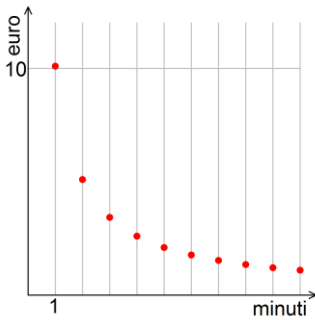


Fig.3

Interpretazione del modello:

Il modello che descrive il costo medio, essendo una sequenza finita, ammette ovviamente sia massimo che minimo:

- Il massimo è assunto per $x = 1$, corrisponde alla minima quantità di minuti di conversazione ed è pari a 10,10 euro
- Il minimo è assunto per $x = 43.200$, pari al numero massimo possibile di minuti di conversazione mensile, ed è $0,100231 \cong 0,10$ euro.

In altri termini, il costo medio è massimo in corrispondenza ad 1 solo minuto di conversazione, poi diminuisce via via che si accumulano i minuti di conversazione, così che la spesa fissa iniziale viene parzialmente ammortizzata. Se si telefonasse ininterrottamente per tutto il mese, il costo medio raggiungerebbe il valore minimo di circa 0,10 €/minuto; in questo modo il costo fisso iniziale sarebbe sostanzialmente ammortizzato.

Osservazione. Continuando a denotare con $g(x)$ la funzione *supporto* di variabile reale

$$g(x) = \frac{10}{x} + 0,10 \quad x \in R \quad 0 < x \leq 43.200$$

si ottiene un arco di iperbole (cfr. grafico in Fig.4 e Fig.4').

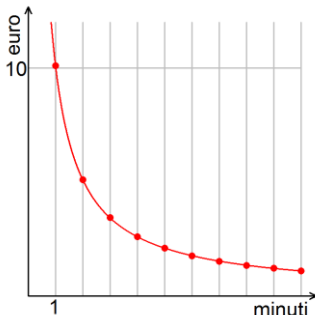


Fig.4

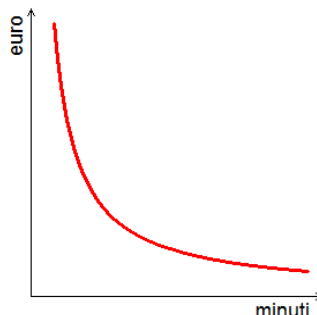


Fig.4'

che ha come asintoto verticale la retta $x = 0$; così non ha massimo, ma ovviamente ha minimo in 43.200.

Infine, se si considera la funzione g avulsa dal contesto di modellizzazione, la si può studiare nel suo dominio massimale

$$g(x) = \frac{10}{x} + 0,10 \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

ottenendo una iperbole che non ammette né massimo, né minimo (assoluto o relativo), cfr. Fig.5.

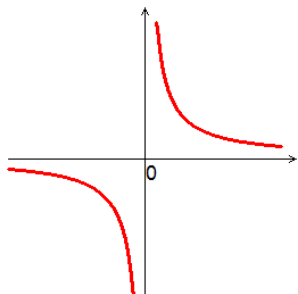


Fig.5

2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che: $g(x_1) = g(x_0)/2$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento.

Significato della relazione: Prima di affrontare il quesito, è opportuno comprendere il significato della questione proposta.

Se sono già stati effettuati x_0 minuti di conversazione nel mese corrente, qual è il numero x_1 di minuti di conversazione che consente di dimezzare l'attuale costo medio?

Il valore x_1 è soluzione (se esiste) del sistema *non lineare* con parametro x_0

$$\begin{cases} g(x_1) = \frac{10}{x_1} + 0,10 = \frac{1}{2} \left(\frac{10}{x_0} + 0,10 \right) = \frac{g(x_0)}{2} \\ 0 < x_0 \leq 43.200 \\ x_0 < x_1 \leq 43.200 \end{cases}$$

Soluzione. Il sistema ammette soluzione solo per valori del parametro $1 \leq x_0 \leq 99$ e la soluzione è unica

$$x_1 = \frac{10 x_0}{5 - 0,05 x_0} \quad x_0 \in \mathbb{N} \quad 1 \leq x_0 \leq 99$$

In altre parole il costo medio al minuto può essere dimezzato (nel corso del mese) solo se sono stati già effettuati al più 99 minuti di conversazione.

Interpretazione della soluzione. Naturalmente aumentando se x_0 cresce, aumenta anche x_1 , cioè la funzione

$$x_1 = F(x_0) = \frac{10 x_0}{5 - 0,05 x_0} \quad x_0 \in \mathbb{N} \quad 1 \leq x_0 \leq 99$$

è crescente. Tale funzione ammette come *supporto* la funzione a variabile reale

$$x_1 = F(x_0) = \frac{10 x_0}{5 - 0,05 x_0} \quad x_0 \in \mathbb{R} - \{100\} \quad 0 < x_0 \leq 43.200$$

che rappresenta un arco di iperbole (vedi Fig.6).

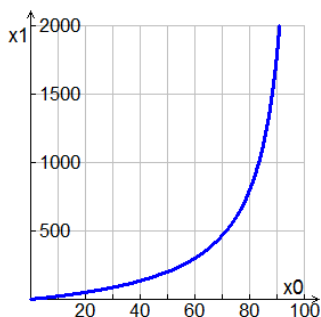


Fig.6

Osservazione. Se consideriamo la funzione fuori dal contesto di modellizzazione, possiamo studiare la legge

$$x_1 = F(x_0) = \frac{10 x_0}{5 - 0,05 x_0}$$

La funzione è un'iperbole con gli asintoti paralleli agli assi coordinati.

Campo di esistenza $\mathbb{R} - \{100\}$; ovviamente $F(0) = 0$

asintoto verticale $x_0 = 100$

asintoto orizzontale $x_1 = -200$: infatti essendo la funzione rapporto di due polinomi dello stesso grado, il

valore asintotico è pari al rapporto dei coefficienti di grado massimo, ovvero $\frac{10}{-0,005} = -200$

grafico in Fig.7

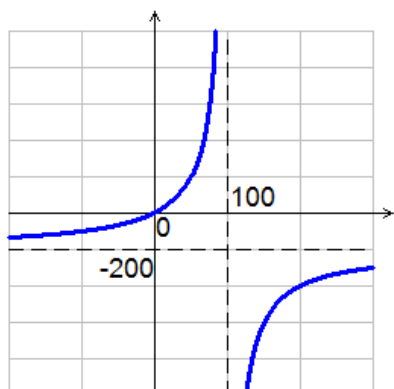


Fig.7

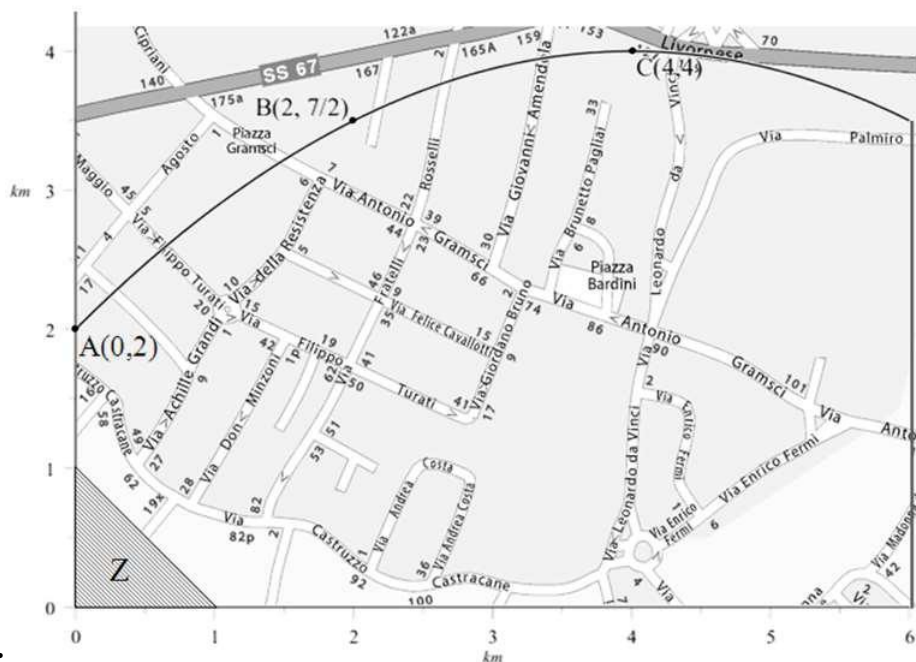
Ulteriore commento sul modello. Mantenendo il significato delle variabili nel contesto del modello ed interpretando l'asintoto verticale, possiamo affermare che se x_0 approssima per difetto il valore 100 , il corrispondente valore x_1 cresce indefinitamente a $+\infty$.

Inoltre per $x_0 > 100$ il corrispondente valore x_1 è negativo, perdendo il suo significato di misura temporale.

Infine ad $x_0 = 100$ non corrisponde alcun elemento x_1 .

Si ottiene così conferma, per via grafica, di quanto già osservato per via algebrica nella risoluzione del sistema.

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo



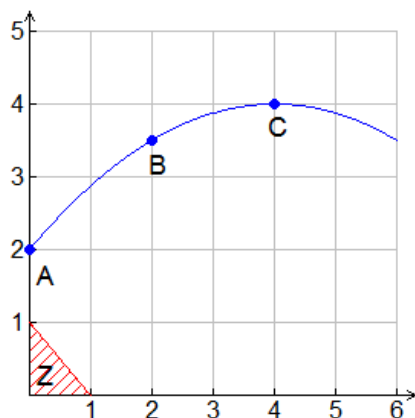
interesse:

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A , B e C , dagli assi x e y , e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A , B e C .

Svolgimento. Curva ABC: determiniamo la parabola $y = ax^2 + bx + c$ che passa per i tre punti A , B e C

$$\begin{cases} c = 2 \\ 7 = 4a + 2b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ b = 1 \\ a = -0,125 \end{cases} \Rightarrow y = -0,125x^2 + x + 2$$



Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: *“nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio”*; verifica se effettivamente è così.

Svolgimento. Per rispondere al quesito, valutiamo l'area α della zona sottesa dalla curva parabolica e confrontiamola con la superficie della zona Z.

Risulta

$$a = \int_0^6 (-0,125x^2 + x + 2) dx = \left[\frac{-0,125}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^6 = 21$$

ed ovviamente

$$\text{area } Z = 0,5$$

La superficie della zona coperta è pari a $21 - 0,5 = 20,5 \text{ km}^2$ su un territorio di 21 km^2 .

Il rapporto è quindi pari a $\frac{20,5}{21} \cdot 100 \cong 97,619$, leggermente superiore al 96%.

Osservazione. Alla luce del modello, l'operatore ha mostrato un atteggiamento "insolitamente prudente", infatti avrebbe potuto a ragione affermare:

"risulta coperto dal segnale oltre il 97% del territorio"

oppure

"risulta coperto dal segnale quasi il 98% del territorio"

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegate il significato nella situazione concreta.

Modifica del modello. Se si adotta la tariffa a scaglioni

$$t(x) = \begin{cases} 0,10 & 0 < x \leq 500 \\ 0,20 & 500 < x \leq 43.200 \end{cases}$$

la funzione **spesa mensile** diventa

$$f^*(x) = \begin{cases} 10 + 0,10x & 0 < x \leq 500 \\ 60 + 0,20(x - 500) & 500 < x \leq 43.200 \end{cases} = \begin{cases} 10 + 0,10x & 0 < x \leq 500 \\ -40 + 0,20x & 500 < x \leq 43.200 \end{cases}$$

che è una funzione continua, lineare a tratti (cfr. Fig.8).

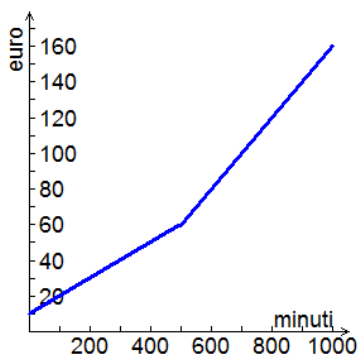


Fig.8

La corrispondente funzione **costo medio** diventa

$$g^*(x) = \begin{cases} \frac{10}{x} + 0,10 & 0 < x \leq 500 \\ -\frac{40}{x} + 0,20 & 500 < x \leq 43.200 \end{cases}$$

che rappresenta due archi di iperbole.

Studio di funzione costo medio. (vedi grafico Fig. 9)

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 500^+} g^*(x) = g^*(500) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 500^+} \left(-\frac{40}{x} + 0,20 \right) = 0,12$$

la funzione è continua.

Ammette la retta $x = 0$ come asintoto verticale poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} g^*(x) = +\infty$.

Per $x \neq 500$ la funzione è derivabile e risulta
$$g^{*'}(x) = \begin{cases} -\frac{10}{x^2} & 0 < x < 500 \\ \frac{40}{x^2} & 500 < x \leq 43.200 \end{cases}$$

poiché $\lim_{x \rightarrow 500^-} g^{*'}(x) = -\frac{1}{25.000} = -0,0004$ e $\lim_{x \rightarrow 500^+} g^{*'}(x) = \frac{4}{25.000}$ la funzione non è derivabile in $x = 500$, ove ammette un punto angoloso (cfr. Fig. 10).

La funzione è decrescente nell'intervallo $[0, 500]$ e crescente altrove.

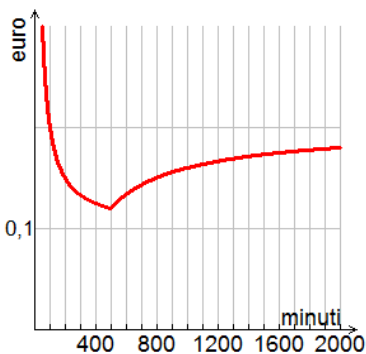


Fig.9

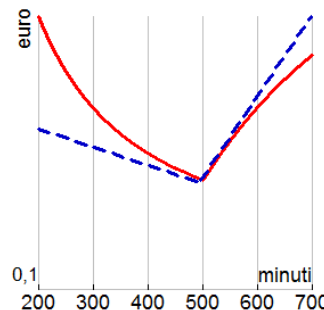


Fig.10

Interpretazione del modello modificato.

La funzione che descrive l'andamento della spesa mensile f^* è crescente e continua: la spesa aumenta al crescere dei minuti di conversazione, in modo continuo, cioè senza subire "salti".

Come la funzione f ha minimo per $x = 0$, corrispondente ai soli costi fissi e assume massimo per $x = 43.200$ (minuti in un mese).

Si osservi però una importante differenza fra f ed f^* : la *velocità di crescita* della spesa non è costante (a causa della diversa tariffa euro/minuto), questo si traduce in un punto angoloso in corrispondenza a $x = 500$.

La funzione che descrive l'andamento del costo medio g^* è continua: il costo medio non subisce "salti" a causa della tariffa a scaglioni.

Si osservi però che, a differenza della funzione g , g^* non è monotona! La tariffa a scaglioni produce una brusca variazione in corrispondenza ad $x = 500$: la funzione passa da decrescente a crescente, con un repentino cambiamento sulla *velocità di crescita/decrecita* che si traduce in un punto angoloso in corrispondenza a $x = 500$.

Il punto $x = 500$ è il punto di minimo. Come già avveniva per la funzione g , la funzione g^* assume massimo in $x = 1$ (cioè il costo medio è massimo nel caso di 1 solo minuto di conversazione)

Osservazione. Ambientando le funzioni f^* e g^* nel loro dominio massimale senza rapportarle al modello, possiamo osservare quanto segue.

La funzione f^* non è limitata né superiormente, né inferiormente.

La funzione g^* non è limitata superiormente, in quanto ha un asintoto verticale $x = 0$. Per valori positivi, tendete asintoticamente ad $y = 0,20$. Possiede un minimo nel punto $x = 500$.

