



XXXI Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, 8 maggio 2015

1. Sia dato un parallelepipedo rettangolo $ABCD A' B' C' D'$, dove $ABCD$ è la faccia inferiore con le lettere assegnate in senso orario, e $A, B, C,$ e D stanno sotto $A', B', C',$ e D' rispettivamente. Il parallelepipedo è diviso in otto pezzi da tre piani ortogonali fra loro e paralleli alle facce del parallelepipedo. Per ogni vertice P del parallelepipedo si indichi con V_P il volume del pezzo di parallelepipedo che contiene P . Sapendo che $V_A = 40, V_C = 300, V_{B'} = 360$ e $V_{C'} = 90$, qual è il volume del parallelepipedo $ABCD A' B' C' D'$?
2. Un servizio di streaming musicale propone canzoni classificate in 10 generi musicali, in modo che ogni brano appartenga ad uno e un solo genere. Le canzoni vengono suonate una dopo l'altra: le prime 17 sono scelte dall'utente, ma a partire dalla diciottesima il servizio determina automaticamente quale canzone suonare. Elisabetta ha notato che, se si fa la classifica di quali generi compaiano più volte nel corso degli ultimi 17 brani suonati, la nuova canzone appartiene sempre al genere in testa alla classifica o, in caso di pari merito, a uno dei primi ex-aequo.
Dimostrare che, comunque siano scelti i primi 17 brani, da un certo punto in poi le canzoni proposte sono tutte dello stesso genere.
3. Sia ABC un triangolo, sia K il piede della bisettrice relativa a BC e sia J il piede della *trisettrice* relativa a BC più vicina al lato AC (ossia J è il punto su BC tale che $3 \cdot \angle CAJ = \angle CAB$). Siano poi C' e B' due punti sulla retta AJ , dalla parte di J rispetto ad A , tali che $AC' = AC$ e $AB = AB'$. Dimostrare che il quadrilatero $ABB'C$ è inscrittibile in una circonferenza se e solo se le rette $C'K$ e $B'B$ sono parallele.
4. Determinare tutte le coppie di numeri interi (a, b) che risolvono l'equazione $a^3 + b^3 + 3ab = 1$.
5. Siano Γ una circonferenza, AB una sua corda, C un punto su AB , r una retta per C tale che, dette D ed E le intersezioni di r con Γ , esse si trovino in parti opposte rispetto all'asse di AB . Siano poi Γ_D la circonferenza tangente esternamente a Γ in D e tangente in un punto F ad AB , Γ_E la circonferenza tangente esternamente a Γ in E e tangente in un punto G ad AB . Dimostrare che $CA = CB$ se e solo se $CF = CG$.
6. Ada e Charles fanno un gioco. All'inizio un numero intero $n > 1$ è scritto sulla lavagna. A turno, Ada e Charles cancellano il numero k che trovano sulla lavagna e lo rimpiazzano
1 – o con un divisore positivo di k diverso da 1 e da k stesso
2 – oppure con $k + 1$.
Inizialmente ciascuno dei giocatori possiede mille punti. Quando un giocatore gioca la mossa 1, guadagna un punto; quando gioca la mossa 2, perde un punto. Il gioco ha termine quando uno dei giocatori giunge ad avere zero punti, e questo giocatore ha perso. Ada gioca per prima. Per quali valori di n Charles ha una strategia vincente?

CASIO