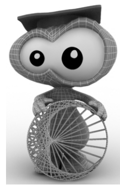
XVI Gara Nazionale a Squadre



Gara del pubblico – 9 Maggio 2015

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **60 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Tante Tartaglie **[40 punti]**

Il temibile Brouwer ha un punto fisso nella vita: eliminare Mathio e Luigbnitz. Per questo ha sguinzagliato i suoi seguaci, le Tartaglie, tra i mondi del Mathioverso. Per ogni $n = 1, 2, \dots$, ha mandato nell'n-esimo mondo $p(n)$ Tartaglie, dove $p(x)$ è un certo polinomio a coefficienti interi. Nei primi cinque mondi, numerati da 1 a 5, ha mandato rispettivamente $p(1) = 2$, $p(2) = 6$, $p(3) = 12$, $p(4) = 20$, $p(5) = 6$ Tartaglie. Nel sesto mondo, invece, ne ha mandate molte di più: Mathio e Luigbnitz ne hanno già sconfitte almeno 50, e ancora non hanno terminato! Quante sono, al minimo?

2. Ci vorrebbe un miracolo! **[25 punti]**

Sospesi per aria ci sono 7^3 cubetti con un punto di domanda, attaccati insieme a formare un grande cubo di lato 7. Alcuni di questi cubetti contengono una stella miracolosa, che fa diventare Mathio bravo in geometria per un breve periodo di tempo. Egli sa che in ogni insieme di 49 cubetti adiacenti che formano un quadrato di lato 7, esattamente uno di essi contiene una stella miracolosa. In quanti modi diversi possono essere disposte le stelle?

3. Un bell'esempio **[35 punti]**

Mathio, Luigbnitz e il dehnosauro Coshi stanno cercando di spiegare a Taod che spesso il prodotto di due numeri reali positivi è maggiore della loro somma. Per mostrargli tre esempi, scelgono un reale positivo ciascuno e poi ognuno di loro tre calcola la differenza tra il prodotto e la somma dei numeri degli altri due. Mathio trova 44, Luigbnitz trova 323 e Coshi trova 979. Quale numero aveva scelto Mathio?

4. Incollamenti al bordo **[65 punti]**

CoMathio e CoLuigbnitz hanno raccolto tutti i 1200^3 cubetti unitari bonus del secondo livello e per dispetto li hanno incollati assieme in un grande cubo di lato 1200. Mathio per usarli deve prima scollarli, e per farlo dà delle sonore craniate, ognuna delle quali rimuove la colla lungo la superficie esterna di un cubo di lato intero a sua scelta fra quelli costituiti da cubetti del cubo grande. Quante testate deve dare come minimo per scollare completamente tutti i cubetti?

5. Passaggio a livello **[40 punti]**

Alla fine del secondo livello Mathio trova il polinomio $m(t) = t^6 - 12t^5 + 48t^4 - 64t^3 - 12t^2 + 48t - 9$ e per passare al livello successivo deve calcolare $-m(4)$, cosa che non lo mette certo in difficoltà. Anche Luigbnitz trova un polinomio $\ell(t)$ di sesto grado e monico (cioè il coefficiente di t^6 in $\ell(t)$ è 1), e anche lui deve calcolare $-\ell(4)$ per passare al livello successivo. Non essendo un asso in algebra, Luigbnitz promette un fungo a Mathio se lo aiuterà nel compito, e viene tranquillizzato così dal fratello: "Non sarà difficile fare il conto: infatti le radici di $\ell(t)$ sono proprio i quadrati delle radici di $m(t)$!". Quale numero deve calcolare Luigbnitz?

6. Anelli con intersezione **[55 punti]**

All'inizio del terzo livello Luigbnitz trova tre anelli circolari con lo stesso raggio, uno rosso, uno dorato e uno verde, e vorrebbe passare attraverso tutti questi anelli per recuperare i relativi bonus. Luigbnitz nota che tutti e tre gli anelli si incontrano in un punto P; inoltre i primi due si incontrano anche nel punto V, il primo e il terzo passano entrambi anche per il punto D e gli ultimi hanno in comune anche il punto R. Luigbnitz prende quindi alcune misure, scoprendo che $VD = 61\,\text{cm}$, $DR = 102\,\text{cm}$ e $RV = 109\,\text{cm}$. Per capire quali bonus effettivamente riuscirà a guadagnare, Luigbnitz deve calcolare l'area del triangolo i cui vertici sono i centri dei tre anelli. Sapreste aiutarlo?

7. Non capire un tubo [60 punti]

Luigbnitz è giunto in una regione piena di tubi verdi: lungo la strada, c'è un tubo in corrispondenza di ogni numero intero positivo n tale che $2015^n - 2015$ è un multiplo di n ed n non è primo. Luigbnitz ha abbastanza energia per saltare oltre un tubo per volta, ma se ci sono due tubi contrassegnati da due numeri interi consecutivi, non è in grado di saltarli. Con molta fatica e con l'aiuto di Mathio, è riuscito a superare la prima coppia di tubi adiacenti e non primi, quella con i numeri più bassi; ora è bloccato di fronte alla seconda tale coppia. Qual è la somma dei due numeri della coppia?

8. Il duello finale [25 punti]

Mathio e Luigbnitz sono finalmente giunti al duello finale contro Brouwer. Ormai Mathio e la principessa Peachtagor distano solo 75 m l'uno dall'altra, ma Brouwer si è messo proprio a metà strada tra di loro. Una pianta kernivora osserva divertita la scena da un punto equidistante da Mathio e dalla principessa, e distante 50 m sia da Brouwer che da Luigbnitz. Mathio si prepara ad attaccare Brouwer, sapendo che il fratello è lì vicino a lui: per la precisione Luigbnitz e Brouwer hanno la stessa distanza da Mathio. Qual è in m^2 l'area del triangolo delimitato da Mathio, Luigbnitz e Peachtagor?

9. Mathio colpisce ancora [30 punti]

Il portone del castello dove forse Brouwer ha imprigionato la principessa Daidekind si aprirà solo se Mathio colpirà il numero giusto di volte i due cubetti sospesi alla destra e alla sinistra dell'ingresso. Sapendo che il numero di volte che bisogna colpire l'uno e l'altro cubetto sono due numeri primi il cui prodotto è 400000001, qual è la differenza tra i colpi dati ad un cubo e all'altro?

10. L'ascensore [30 punti]

Per arrivare in cima alla torre dove è rinchiusa la principessa Peachtagor, Mario deve salire su un buffo ascensore. L'ascensore è una pedana rettangolare ABCD, che sale di 10 m verso l'alto, percorrendo un metro al secondo a velocità costante, ruotando intanto a velocità costante attorno al suo centro, compiendo un giro ogni 2 secondi. Intanto, le lunghezze dei lati AB e CD aumentano a velocità costante di 2 metri al secondo, mentre BC e AD si allungano anche loro a velocità costante di 3 metri al secondo. Sapendo che all'inizio della salita la pedana ha la forma di un quadrato di lato 2 m, quanti metri cubi misura la regione di spazio percorsa dall'ascensore?

11. Prove libere [55 punti]

Tutti gli amici di Mathio e tutte le Tartaglie di Brouwer stanno facendo le prove libere nel nuovo circuito per i Kartan, procedendo con regolarità e senza sorpassi. Siccome i Kartan sono 2015 in tutto, gli spazi non sono larghi e quando improvvisamente scattano le GNAPF (Grosse Nere Aggressive Palle di Ferro), 6 Kartan vengono colpiti. Sapendo che i 2015 Kartan sono tutti diversi, l'ordine in cui viaggiano è fissato e che le GNAPF non riescono mai a colpire due Kartan consecutivi (anche il primo e l'ultimo sono considerati consecutivi), in quanti modi le GNAPF possono scegliere quali Kartan colpire? Si fornisca come risposta la somma di tutti i fattori primi che compongono il risultato, ognuno contato una sola volta a prescindere dalla molteplicità.

12. Percorso vincolato [35 punti]

I Kartan di Mathio e Luigbnitz devono affrontare la terribile Pista di Brouwer, che è costituita dalla superficie di una grande montagna conica con diametro di base di 2015 m. Ci sono 6 punti obbligati di passaggio, situati lungo la circonferenza di base sui vertici di un esagono regolare. I concorrenti partono da uno di questi e devono toccare ciascuno degli altri cinque. C'è un unico vincolo: se A, B, C sono tre punti obbligati consecutivi sul bordo dell'esagono, con B compreso tra A e C, e durante il percorso si va da A a B senza passare per alcun punto obbligato diverso da A e B, subito dopo non si può andare da B a C senza passare per alcun punto obbligato diverso da B e C (e analogamente non si può andare da C direttamente in B e subito dopo da B direttamente in A). Per ciascun concorrente la gara termina quando tocca il suo sesto punto. Sapendo che la strada più breve dalla base della montagna alla cima è di 2015 m, quanti metri bisogna percorrere come minimo per concludere la gara?

XVI Gara Nazionale a Squadre

Gara del pubblico – Soluzioni – 9 Maggio 2015

Nr.	Problema	Punti	Soluzione
1	Tante Tartaglie	40	0162
2	Ci vorrebbe un miracolo!	25	1600
3	Un bell'esempio	35	0085
4	Incollamenti al bordo	65	4796
5	Passaggio a livello	40	9375
6	Anelli con intersezione	55	3060
7	Non capire un tubo	60	0077
8	Il duello finale	25	1350
9	Mathio colpisce ancora	30	0400
10	L'ascensore	30	2540
11	Prove libere	55	1172
12	Percorso vincolato	35	7159