

XVI Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – 9 Maggio 2015



Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. [★] Diecimila Tartaglie

Il temibile Brouwer ha un punto fisso nella vita: eliminare Mathio e Luibnitz. Per questo ha sguinzagliato i suoi seguaci, le 10000 Tartaglie, numerate da 1 a 10000, tra i mondi del Mathioverso. Ha ordinato che si dividano secondo questa regola: se due Tartaglie numerate con i numeri a e b sono tali che a è un divisore di $2^n b$ per qualche intero non negativo n , allora a e b devono andare in due mondi diversi! In quanti mondi diversi, al minimo, sono andate le Tartaglie?

2. Ci vorrebbe un miracolo!

Sospesi per aria ci sono 6^3 cubetti con un punto di domanda, attaccati insieme a formare un grande cubo di lato 6. Alcuni di questi cubetti contengono una stella miracolosa, che fa diventare Mathio bravo in geometria per un breve periodo di tempo. Egli sa che in ogni insieme di 36 cubetti adiacenti che formano un quadrato di lato 6, esattamente uno di essi contiene una stella miracolosa. In quanti modi diversi possono essere disposte le stelle? *Due cubetti si dicono adiacenti se hanno una faccia in comune.*

3. Insistere non serve a nulla

Nel tentativo di far comparire una pianta magica, Luibnitz salta per venti volte sopra le facce di un cubo, sfidando le leggi della gravità. Nei salti dispari (primo, terzo, ..., diciannovesimo) con probabilità $1/2$ atterra sulla faccia da cui ha spiccato il salto, e con probabilità $1/2$ atterra sulla faccia opposta. Nei salti pari, atterra su una delle quattro facce adiacenti a quella da cui ha saltato, ognuna con probabilità $1/4$. Qual è la probabilità che dopo il ventesimo salto atterri proprio sulla faccia da cui è partito? *Si risponda indicando la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

4. [★] Senza mai fermarsi

In ogni livello Mathio deve percorrere una lunga distanza prima di raggiungere la bandiera finale e il castello dove spera di trovare la sua principessa. Nel primo livello, deve correre per $a_1 = 7$ km; nel secondo, per $a_2 = 11$ km. Nell' n -esimo livello, per $n = 3, 4, 5, \dots$, deve correre per un numero di chilometri a_n pari a $\frac{a_{n-1}^2 + 61}{a_{n-2}}$. Quanti chilometri dovrà percorrere nel decimo livello?

5. Primi sparsi

Il Bossel finale del primo livello sarà un polinomio $f(x)$ scelto dal malvagio Brouwer tra quelli a coefficienti interi della forma $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tali che $a_0 - 3a_2 + 9a_4 = 0$ e $a_1 - 3a_3 + 9a_5 = 0$, e per sconfiggerlo Mathio dovrà fattorizzare il numero $f(33)$. Taod, il fungo antrolomorfo, vuole aiutare Mathio: per ogni primo p che sicuramente dividerà $f(33)$ lascia in un punto del livello un foglio con scritto il numero p . Mathio raccoglie i fogli e per esercizio calcola la somma dei numeri scritti. Sapreste farlo anche voi?

6. Mathio colpisce ancora

Il portone del castello dove forse Brouwer ha imprigionato la principessa Daidekind si aprirà solo se Mathio colpirà il numero giusto di volte i due cubetti sospesi alla destra e alla sinistra dell'ingresso. Sapendo che il numero di volte che bisogna colpire l'uno e l'altro cubetto sono due numeri primi il cui prodotto è 359999, quanti colpi dovrà dare in tutto Mathio per entrare?

7. [★] Castelli in aria

“Grazie Mathio, ma la nostra principessa è in un altro castello”, dice Taod a Mathio. “Oh no! Sai almeno dirmi in quale dei tanti?” “Il suo numero non è altro che il resto nella divisione per 53 di $p(0) + p(1) + p(2) + \dots + p(2014)$.” “Ah – ma cos’è p ?” “Che domande, è il polinomio $p(t) = (50t + 1)(49t + 2) \cdots (2t + 49)(t + 50)$.” “Ok, allora è tutto chiaro!”. Qual è il numero del castello della principessa?

8. Un bell’esempio

Mathio, Luigbnitz e il dehnosauro Coshi stanno cercando di spiegare a Taod che spesso il prodotto di due numeri reali positivi è maggiore della loro somma. Per mostrargli tre esempi, scelgono un reale positivo ciascuno e poi ognuno di loro tre calcola la differenza tra il prodotto e la somma dei numeri degli altri due. Mathio trova 11, Luigbnitz trova 524 e Coshi trova 1371. Quale numero aveva scelto Mathio?

9. Pericolo di scoppimento

Il malvagio Brouwer ha brevettato un nuovo modello di Bobo-mba contrassegnato dal numero ABC, ove A, B, C sono cifre decimali diverse da 0 con $C = B + 2$. Mathio e Luigbnitz devono disinnescare uno di questi ordigni con un codice di quattro cifre. Mathio prova con il codice $3 \cdot AC \cdot CA$ ma fallisce, perdendo una vita. Luigbnitz prova con il numero naturale successivo, che è $10 \cdot AB \cdot BA$, e riesce a neutralizzare la Bobo-mba. Qual è il codice usato da Luigbnitz?

10. [★] Incollamenti al bordo

CoMathio e CoLuigbnitz hanno raccolto tutti i 2015^3 cubetti unitari bonus del secondo livello e per dispetto li hanno incollati assieme in un grande cubo di lato 2015. Mathio per usarli deve prima scollarli, e per farlo dà delle sonore craniate, ognuna delle quali rimuove la colla lungo la superficie esterna di un cubo di lato intero a sua scelta fra quelli costituiti da cubetti del cubo grande. Quante testate deve dare come minimo per scollare completamente tutti i cubetti?

11. [★] Raccolta fondi

Luigbnitz è giunto in una regione piena di tubi verdi: per ogni terna di interi compresi tra 0 e 2015, estremi inclusi, c’è un tubo verde contrassegnato dalla terna (m, n, a) . Spesso i tubi verdi contengono monete, e in questo caso c’è una moneta in ogni tubo la cui terna (m, n, a) soddisfa $m + n > 0$ e $n^2 = m^{\frac{n}{2}} + a^2$. Luigbnitz tira fuori il suo salvadanaio e con somma pazienza si mette a raccogliere tutte le monete. Quante sono?

12. Passaggio a livello

Alla fine del secondo livello Mathio trova il polinomio $m(t) = t^6 - 3t^5 - 13t^4 + 30t^3 + 39t^2 - 27t - 27$ e per passare al livello successivo deve calcolare $-m(4)$, cosa che non lo mette certo in difficoltà. Anche Luigbnitz trova un polinomio $\ell(t)$ di sesto grado e monico (cioè il coefficiente di t^6 in $\ell(t)$ è 1), e anche lui deve calcolare $-\ell(4)$ per passare al livello successivo. Non essendo un asso in algebra, Luigbnitz promette un fungo a Mathio se lo aiuterà nel compito, e viene tranquillizzato così dal fratello: “Non sarà difficile fare il conto: infatti le radici di $\ell(t)$ sono proprio i quadrati delle radici di $m(t)$!”. Quale numero deve calcolare Luigbnitz?

13. [★] Anelli con intersezione

All’inizio del terzo livello Luigbnitz trova tre anelli circolari con lo stesso raggio, uno rosso, uno dorato e uno verde, e vorrebbe passare attraverso tutti questi anelli per recuperare i relativi bonus. Luigbnitz nota che tutti e tre gli anelli si incontrano in un punto P ; inoltre i primi due si incontrano anche nel punto V , il primo e il terzo passano entrambi anche per il punto D e gli ultimi hanno in comune anche il punto R . Luigbnitz prende quindi alcune misure, scoprendo che $VD = 61$ cm, $DR = 102$ cm e $RV = 109$ cm. Per capire quali bonus effettivamente riuscirà a guadagnare, Luigbnitz deve calcolare l’area del triangolo i cui vertici sono i centri dei tre anelli. Sapreste aiutarlo?

14. Mathio cresce

Nel corso del terzo livello, Mathio trova alcuni cubi sospesi contenenti funghi magici. Più precisamente per ogni soluzione dell’equazione $(m + n)(m - n) + m = 3 - 4n$ con m e n interi non negativi c’è un cubo sospeso contrassegnato dalla coppia (m, n) , e quando Mathio lo colpisce con una craniata ne escono fuori n funghi, che Mathio divora immediatamente. Sapendo che ogni fungo fa raddoppiare l’altezza di chi lo mangia e che all’inizio del livello Mathio è alto un metro, quanti metri sarà alto alla fine del livello?

15. Un’isola deserta

A un tratto Mathio e Luigbnitz escono contemporaneamente da due tubi e scoprono di essere giunti su un’isola a forma di trapezio isoscele con basi lunghe 6 m e 4 m. La superficie dell’isola è quasi interamente occupata dalle due uscite circolari e congruenti dei tubi: questi due cerchi sono infatti tangenti tra loro e ognuno di essi è tangente alle basi e a uno dei due lati obliqui del trapezio. I due fratelli capiscono in fretta che non c’è nulla di interessante e ridiscendono ognuno per il tubo da cui è venuto. Qual è il raggio dei tubi in millimetri?

16. [★] La grande foresta

La principessa Rosalindeberg è prigioniera da qualche parte nella Enorme Foresta Piana. Per trovarla Mathio e Luigbnitz attivano contemporaneamente due rilevatori che stanno all'interno della foresta, a 10 km di distanza l'uno dall'altro. Le spie su entrambi i rilevatori si accendono e ciò significa che la principessa deve essere abbastanza vicina, per cui esiste un cerchio del raggio di 10 km che contiene al suo interno i due rilevatori e la principessa. Quanto misura in km^2 l'area della zona di foresta dove devono cercare la principessa?

17. Il duello finale

Mathio e Luigbnitz sono finalmente giunti al duello finale contro Brouwer. Ormai Mathio e la principessa Peachtagor distano solo 150 m l'uno dall'altra, ma Brouwer si è messo proprio a metà strada tra di loro. Una pianta kernivora osserva divertita la scena da un punto equidistante da Mathio e dalla principessa, e distante 100 m sia da Brouwer che da Luigbnitz. Mathio si prepara ad attaccare Brouwer, sapendo che il fratello è lì vicino a lui: per la precisione Luigbnitz e Brouwer hanno la stessa distanza da Mathio. Qual è in m^2 l'area del triangolo delimitato da Mathio, Luigbnitz e Peachtagor?

18. Una bella scorpacciata

Per festeggiare la vittoria, Mathio, Luigbnitz e la principessa Peachtagor fanno merenda. I tre dispongono nove funghi in ordine crescente di peso, e notano che i loro pesi sono in progressione geometrica. Mathio mangia il primo, Luigbnitz il secondo, Peachtagor il terzo, Mathio il quarto, e così via, a turno, finché non sono finiti tutti. Alla fine della scorpacciata Mathio esclama "Peachtagor, wow, i funghi che hai mangiato pesano tanto quanto quelli che abbiamo mangiato io e Luigbnitz messi insieme!" e Luigbnitz aggiunge "Ma io ho mangiato soltanto 1000 grammi di funghi". Quanti grammi di funghi ha mangiato la principessa?

19. Ci troviamo vicino al centro

Le principesse Peachtagor e Daidekind si sono date appuntamento all'interno di un triangolo equilatero di lato 9 km. Peachtagor ha descritto all'amica in questo modo il luogo dell'incontro: si tratta di un punto che dista $\sqrt{3}$ km da un lato, e $2\sqrt{3}$ km da un altro lato. Daidekind però, meno esperta di geometria, non ha capito esattamente dove deve recarsi. Sapreste aiutarla, dicendole quanti metri dista questo punto dal circocentro del triangolo?

20. Prove libere

Tutti gli amici di Mathio e tutte le Tartaglie di Brouwer stanno facendo le prove libere nel nuovo circuito per i Kartan, procedendo con regolarità e senza sorpassi. Siccome i Kartan sono 2015 in tutto, gli spazi non sono larghi e quando improvvisamente scattano le GNAPF (Grosse Nere Aggressive Palle di Ferro), 5 Kartan vengono colpiti. Sapendo che i 2015 Kartan sono tutti diversi, l'ordine in cui viaggiano è fissato e che le GNAPF non riescono mai a colpire due Kartan consecutivi (anche il primo e l'ultimo sono considerati consecutivi), in quanti modi le GNAPF possono scegliere quali Kartan colpire? Si fornisca come risposta la somma di tutti i fattori primi che compongono il risultato, ognuno contato una sola volta e prescindere dalla molteplicità.

21. Percorso vincolato

I Kartan di Mathio e Luigbnitz devono affrontare la terribile Pista di Brouwer, che è costituita dalla superficie di una grande montagna conica con diametro di base di 500 m. Ci sono 6 punti obbligati di passaggio, situati lungo la circonferenza di base sui vertici di un esagono regolare. I concorrenti partono da uno di questi e devono toccare ciascuno degli altri cinque. C'è un unico vincolo: se A, B, C sono tre punti obbligati consecutivi sul bordo dell'esagono, con B compreso tra A e C , e durante il percorso si va da A a B senza passare per alcun punto obbligato diverso da A e B , subito dopo non si può andare da B a C senza passare per alcun punto obbligato diverso da B e C (e analogamente non si può andare da C direttamente in B e subito dopo da B direttamente in A). Per ciascun concorrente la gara termina quando tocca il suo sesto punto. Sapendo che la distanza tra la cima della montagna e un punto qualunque della sua base è di 500 m, quanti metri bisogna percorrere come minimo per concludere la gara?

22. [★] Una gara entusiasmante

Mathio e Luigbnitz sfidano i loro rivali CoMathio e CoLuigbnitz in una co-rsa di Kartan su una pista circolare. Al momento della partenza i quattro concorrenti si trovano in quattro punti distinti della pista, e Mathio ha la stessa distanza dall'alleato Luigbnitz e dall'avversario CoMathio. Peachtagor, venuta a fare il tifo, si trova sulla retta che congiunge Luigbnitz e CoLuigbnitz, e ha scelto su questa retta la posizione più vicina a Mathio. CoMathio e CoLuigbnitz distano in linea d'aria 9000 m, e Coshi, che si occupa di commentare la gara, si è posizionato sulla retta che li congiunge, anche lui scegliendo il punto più vicino a Mathio. Al momento della partenza, Mathio nota che Luigbnitz è proprio nel punto medio tra Peachtagor e CoLuigbnitz. Qual è la distanza in metri tra CoLuigbnitz e Coshi?

23. Sfida all'ultimo metro

Dopo 100 corse sui Kartan, i nostri eroi Mathio, Luigbnitz, Peachtagor, Daidekind e Rosalindeberg vogliono scoprire chi è il vincitore della loro gara. La classifica è molto semplice e riporta solamente il numero di corse vinte da ognuno di loro cinque. Ognuno ne ha vinta almeno una; il numero di corse vinte da Rosalindeberg è multiplo di 17, e il numero di corse vinte da Luigbnitz è multiplo di 31. Quante sono le possibili classifiche che rispettano queste condizioni?

24. Giro di scommesse

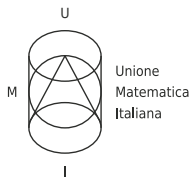
Mathio e Luigbnitz hanno deciso di scommettere sulle corse dei Kartan con le monete che hanno raccolto. Siano M_1, M_2, \dots le monete guadagnate da Mathio scommettendo sulle corse numero 1, 2, \dots e siano L_1, L_2, \dots allo stesso modo le monete guadagnate da Luigbnitz (se il valore è negativo vuol dire che sono monete perse, ma a noi non fa differenza). I primi valori di queste successioni sono

$$M_1 = 3, \quad M_2 = 2, \quad M_3 = 5, \quad L_1 = 5, \quad L_2 = 4$$

I valori successivi seguono invece le regole seguenti:

$$M_n = -M_{n-1} - 4M_{n-3} + 3L_{n-1} - 3L_{n-2} + 2, \quad \text{e} \quad L_n = M_{n-1} + M_{n-2} + L_{n-1} - 3$$

Dopo un po' Mathio si rende conto che sta rischiando la rovina, e si dà una regola per smettere di giocare: smetterà quando per la 1000-esima volta la somma delle monete guadagnate in due corse successive darà resto 3 nella divisione per 7. Dopo quante corse smette di giocare Mathio?



XVI Gara Nazionale a Squadre



Finale Nazionale – Soluzioni – 9 Maggio 2015

Nr.	Problema	Soluzione
1	[★]Diecimila Tartaglie	0067
2	Ci vorrebbe un miracolo!	8400
3	Insistere non serve a nulla	1195
4	[★]Senza mai fermarsi	1515
5	Primi sparsi	0025
6	Mathio colpisce ancora	1200
7	[★]Castelli in aria	0026
8	Un bell'esempio	0246
9	Pericolo di scoppimento	1210
10	[★]Incollamenti al bordo	8056
11	[★]Raccolta fondi	2022
12	Passaggio a livello	7875
13	[★]Anelli con intersezione	3060
14	Mathio cresce	0016
15	Un'isola deserta	1200
16	[★]La grande foresta	0855
17	Il duello finale	5400
18	Una bella scorpacciata	1618
19	Ci troviamo vicino al centro	1000
20	Prove libere	0647
21	Percorso vincolato	1776
22	[★]Una gara entusiasmante	6000
23	Sfida all'ultimo metro	2165
24	Giro di scommesse	3000