

XVI Gara Nazionale a Squadre

Semifinale A – 8 Maggio 2015



Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Grandi numeri

Per passare un pomeriggio piovoso, Mario rispolvera la sua collezione di vecchi videogiochi. Ne ha davvero tanti! Sono tanti quanti il massimo numero di regioni in cui può essere suddiviso il piano tracciando 49 circonferenze dello stesso raggio, tutte passanti per uno stesso punto comune. Quanti sono i videogiochi?

2. Attacco da Marte!

Per sconfiggere le astronavi aliene, è necessario determinare tutti i numeri interi positivi tali che sono uguali a 245 volte la somma delle loro cifre scritti in base 7. Quanto vale la somma di questi numeri (scritta in base 10)?

3. Uno strano giallo

PCAMAN è una strana creatura amata dagli statistici, costituita da una semisfera di raggio 12 cm sopra cui giace un cono di altezza 10 cm, in modo che le basi dei due solidi siano due cerchi uguali e coincidenti; i due solidi stanno da parti opposte del piano rispetto a questa base. Per arrivare al livello successivo egli deve mangiare un puntino giallo per ogni suo *centilitro* di volume, *arrotondando per eccesso*. Quanti puntini gialli deve mangiare in totale?

4. Livello mayhem

Il lemming (plurale lemmings) è un simpatico animaletto protagonista di un gioco molto amato da Mario. Nell'ultimo livello ci sono delle buche, numerate da 0 a un certo numero n . In ciascuna di esse si possono imprigionare dei lemmings e in ogni momento sullo sfondo viene visualizzato il polinomio $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, dove a_i è il numero di lemmings nella buca i . Per completare il livello occorre che fare in modo che $p(7) = 33611$. Mario ci riesce riempiendo ogni buca con un numero di lemmings compreso tra 1 e 6. Determinare il prodotto dei coefficienti del polinomio in quel momento.

5. Andare da solo è pericoloso!

Nella sua avventura per salvare la principessa Zera, Unlink è armato di una spada e uno scudo. Lo scudo ha la forma di un quadrilatero $ABCD$ tale che $AB = 10$ dm, $BC = CD = 4\sqrt{3}$ dm, $\widehat{BAD} = 90^\circ$ e $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Qual è l'area dello scudo? *Esprimere il risultato in cm^2 .*

6. Tutto è relativo

Il simbolo della Quadriforza si ottiene tramite un processo chiamato *quadrattizzazione* di un poligono. Dato un poligono iniziale, si costruisce su ogni suo lato un quadrato esterno al poligono. Ora si considerano i due quadrati costruiti su ogni coppia di lati consecutivi, e si unisce con un segmento i due vertici, uno per quadrato, non appartenenti al poligono iniziale e più vicini tra loro: i lati più esterni così ottenuti formano un poligono più grande. Per esempio, partendo da un triangolo equilatero di lato 4, Unlink lo quadrattizza e ottiene un esagono. Non contento, quadrattizza anche questo: quanto vale l'area della figura ottenuta?

7. All'ultimo punto

Arctanoid è un gioco il cui obiettivo è distruggere un enorme muro formato da 2015 mattoncini: Mario è imbattibile e li distrugge al ritmo di uno al secondo. Il punteggio viene assegnato in questo modo: ogni due mattoncini distrutti si guadagna un numero razionale di punti pari al rapporto tra 10000 e $s^2 - 1$, dove s sono i secondi trascorsi dall'inizio del gioco. Perciò, quando dopo 2 secondi Mario distrugge il secondo mattoncino guadagna i suoi primi $\frac{10000}{3}$ punti e quando dopo 4 secondi distrugge il quarto guadagna altri $\frac{10000}{15}$ punti. Quanti punti avrà alla fine del gioco?

8. [★] Nemici ovunque

Per bloccare i suoi nemici, Bombierman ha disposto 121 bombe a formare i vertici di una griglia quadrata regolare di lato 10. Ora sa che i suoi nemici si trovano all'interno di una circonferenza sulla quale giacciono *esattamente* due bombe, che si trovano agli estremi di un suo diametro. Quante possibili circonferenze siffatte ci sono? *Le circonferenze non sono per forza contenute all'interno della griglia quadrata.*

9. [★] Finiscilo!

Mario ha quasi sconfitto il 37esimo e ultimo mostro finale, e deve dargli il colpo di grazia. Per stordirlo definitivamente, cosa meglio di un complicato testo di geometria? Egli esclama: “Sia $ABCD$ un trapezio rettangolo di base maggiore AB e lato obliquo BC . Si tracci la perpendicolare alle basi passante per C e si indichi con E il suo punto di intersezione con la diagonale BD e con F il suo punto di intersezione con AB . Sapendo che i cateti dei triangoli rettangoli ABD , BEF , CDE , BCF hanno tutti lunghezza intera e che l'area del triangolo BCE vale 10, determinare la differenza tra il massimo e il minimo valore che può assumere l'area del quadrilatero $FBCD$ ”. Qual è la soluzione di questo problema?

10. Su, su, giù, giù, sinistra. . .

Il codice per accedere al Livello Segreto della Combinatoria su Parole è un numero di quattro cifre $abcd$ (dove a indica la cifra delle migliaia, b quella delle centinaia e così via) tale che i numeri di due cifre formati dalle cifre ab , bc , cd siano tutti quadrati perfetti. Quanto vale la somma di tutti i possibili codici segreti che rispettano questa condizione? *La cifra iniziale di un numero si intende sempre diversa da zero.*

11. Nemici e amici

Per immortalare la sua ultima vittoria in Evolution Equation Soccer, Mario decide di fotografare la sua squadra di 11 giocatori (1 portiere, 4 difensori, 3 centrocampisti, 3 attaccanti). Per questo ordina ai suoi giocatori di disporsi su un'unica fila, uno a fianco all'altro. Però, gli attaccanti non si passano mai la palla tra di loro, quindi nessun attaccante vuole stare vicino ad un altro attaccante. I centrocampisti, invece, vogliono stare a tutti i costi vicini. In quanti modi si possono disporre gli 11 giocatori in modo che ognuno sia contento? *Tutti i giocatori, anche quelli con lo stesso ruolo, sono distinguibili tra loro. Si risponda fornendo le prime quattro cifre del risultato.*

12. Permutation city

I Syms sono delle simulazioni di persone che vivono in un mondo immaginario, con le loro vite e con i loro lavori virtuali. Nella piazza principale della loro città, Mario ha costruito una lavagna su cui compare un numero intero K compreso tra 1 e 1100. Uno dopo l'altro, 1100 di loro passano davanti alla lavagna e per ogni $n = 1, 2, \dots, 1100$ l' n -esimo di essi afferma: “Il massimo comun divisore tra n e K è 1”. Solo alcuni però hanno detto la verità! Quanti sono, al minimo, i Syms che hanno detto la verità?

13. [★] Il credo del Matematico

Ezio Cardano, l'assassino matematico, girava per i tetti della Firenze rinascimentale eliminando tutti coloro che non sapevano risolvere le sue equazioni. A una delle sue vittime pose questo problema: siano a, b, c reali tali che $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 128$, $a^5 + b^5 + c^5 = 28800$. Quanto vale $a^3 + b^3 + c^3$?

14. Allenamenti complessi

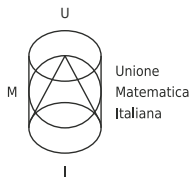
Ash è un giovane allenatore di polinomi monici, in breve Polimon. Possiede 65 Polimon, numerati da 1 a 65. Per allenarli, li dispone tutti in fila in ordine decrescente (quello più a sinistra è il numero 65, quello più a destra è il numero 1). Una volta al minuto, Ash suona una campanella e grida il numero k di un Polimon tra 2 e 65, e questo deve abbandonare il suo posto e rientrare nella fila posizionandosi subito a destra di quello col numero $k - 1$. Se il Polimon k si trova già subito a destra di quello numerato $k - 1$, Ash non può chiamare il suo numero. L'allenamento termina quando non è possibile più chiamare alcun numero. Quante volte al massimo può suonare la sua campanella Ash durante un allenamento?

15. [★] Degno di un ninja

Con un movimento netto delle dita, Mario deve affettare in due parti uno strano frutto a forma di icosaedro regolare. È necessario che il taglio sia fatto lungo un piano che passa per almeno tre vertici dell'icosaedro. Quanti sono questi piani?

16. [★] Teoria dei campi

Mario ha comprato un nuovo campo (ordinato e completo) per la sua fattoria virtuale. Si tratta di un terreno rettangolare di area 127 199, in cui le lunghezze dei lati sono numeri primi. Il suo costo è stato una quantità di monete di bronzo pari al quadrato della lunghezza della diagonale. Mario ha pagato usando solamente monete d'oro, e ha ricevuto un certo numero di monete di bronzo come resto. Sapendo che una moneta d'oro vale 144 monete di bronzo, a quanto ammonta il resto ricevuto da Mario? *Il valore del resto è minore di quello di una moneta d'oro.*



XVI Gara Nazionale a Squadre

Semifinale A – Soluzioni – 8 Maggio 2015



Nr.	Problema	Soluzione
1	Grandi numeri	1226
2	Attacco da Marte!	4410
3	Uno strano giallo	0513
4	Livello mayhem	5184
5	Andare da solo è pericoloso!	3556
6	Tutto è relativo	0339
7	All'ultimo punto	4997
8	[★] Nemici ovunque	0528
9	[★] Finiscilo!	0180
10	Su, su, giù, giù, sinistra...	3462
11	Nemici e amici	9072
12	Permutation city	0252
13	[★] Il credo del Matematico	0270
14	Allenamenti complessi	2080
15	[★] Degno di un ninja	0067
16	[★] Teoria dei campi	0094