Madd-Spot
La serie speciale di articoli divulgativi di Maddmaths!

Web site
http://maddmaths.simai.eu/

DILEMMA O NON DILEMMA, QUESTO È IL DILEMMA!

DI LUCIA PUSILLO

La Teoria dei Giochi si occupa in generale delle tecniche matematiche per analizzare situazioni in cui due o più individui prendono decisioni che influenzeranno il proprio e l'altrui benessere. Le situazioni che i matematici studiano non sono meramente ricreative, come potrebbe erroneamente far pensare il termine "gioco". Si può datare l'inizio di questa giovane scienza con i lavori di Von Neumann e Morgenstein del 1944.

Ricordate il film "A beautiful mind"? Narra la vita di John Nash, uno tra i più grandi matematici che ha dato notevoli contributi alla Teoria dei Giochi. Il termine *gioco* si riferisce ad ogni situazione sociale che coinvolge due o più individui: i *giocatori*. I giocatori sono supposti sempre essere decisori razionali, cioè prenderanno decisioni tali da massimizzare il payoff (profitto) della propria utilità attesa. In generale, massimizzare il payoff *dell'utilità attesa* non è lo stesso che massimizzare il payoff *monetario atteso*: se un individuo è avverso al rischio aumenta di più la sua utilità attesa vincendo un dollaro quando è povero che vincendo lo stesso dollaro quando è ricco.

La Teoria dei Giochi può essere vista come una estensione della Teoria delle Decisioni (al caso di due o più decisori razionali), quindi per comprendere le idee fondamentali della Teoria dei Giochi è bene incominciare a studiare la Teoria delle Decisioni.

Le decisioni riempiono la nostra vita. È proprio la capacità di scegliere e di esprimere i nostri desideri che distingue la vita dell'essere intelligente da quello delle forme inferiori. Chi è un buon decisore? A volte dobbiamo delegare gli altri, e vorremmo essere certi che decidano bene. Uno degli scopi della Teoria delle Decisioni è proprio studiare che cosa è importante sapere per essere un buon decisore. Ecco qualche esempio "provocante":

COMPAGNIA TELEVISIVA

Una compagnia televisiva sta facendo una selezione per un festival canoro. Sette giudici sono stati convocati e hanno ascoltato quattro canzoni che chiameremo semplicemente A, B, C, D. Ciascun giudice classifica le canzoni in ordine di preferenza: attribuisce 4 punti alla prima scelta, 3 punti alla seconda, 2 punti alla terza e 1 punto alla quarta. La canzone che avrà ottenuto il totale più alto di punti sarà la canzone vincente.

Sembra che i giudici abbiano votato come in tabella:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	TOT
A	4	1	2	4	1	2	4	18
B	3	4	1	3	4	1	3	19
C	2	3	4	2	3	4	2	20
D	1	2	3	1	2	3	1	13

Quindi la canzone C è quella vincente.

Immediatamente gli autori della canzone A protestano, perché la canzone D non doveva entrare nelle selezioni, infatti sussiste la regola che gli autori dovrebbero essere amatori, ma quelli della canzone D sono professionisti. La compagnia televisiva ammette che è stato fatto un errore: la canzone D dovrebbe essere squalificata. Ma qual è il problema? La canzone D, infatti è in fondo. Ciascun giudice preferiva la canzone C invece che la D. Così sembra che non ci sia stata alcuna ingiustizia, tuttavia gli autori della canzone A non sono soddisfatti. L' argomento è che la canzone D doveva essere squalificata *prima* della classifica, così i giudici avrebbero avuto solo tre canzoni da scegliere e ciascun giudice avrebbe dato 3 punti alla prima scelta, 2 punti alla seconda scelta e 1 punto alla terza scelta. Supponendo che le preferenze rimangano quelle della tabella precedente, le canzoni avrebbero ottenuto il seguente punteggio:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	TOT
A	3	1	2	3	1	2	3	15
B	2	3	1	2	3	1	2	14
C	1	2	3	1	2	3	1	13

e la canzone A sarebbe stata la vincitrice. Sembra quindi che gli autori della canzone A avessero motivo di protestare!

IL PROBLEMA DEI 3 CAPPELLI

Simone, Francesco e Sofia indossano un cappello che può essere rosso o nero. Ognuno di loro può vedere il cappello degli altri ma non il proprio. Dall'esterno noi osserviamo che hanno tutti e tre un cappello rosso.

Entra Giulio nella stanza e osserva: «In questa stanza c'è almeno una persona con il cappello rosso». Questa osservazione ci sembra inutile, tutti infatti sanno già che nella stanza ci sono almeno due persone con il cappello rosso. Dopo un po' Giulio si rivolge a Simone e gli chiede se conosce il colore del suo cappello. «Ovviamente no», è la sua risposta. Stessa domanda e stessa risposta quando è il turno di Francesco, invece quando è il turno di Sofia, ella risponde: «Il mio cappello è rosso».

Pensate abbia indovinato? Qual è stato il suo ragionamento? Sofia ha elaborato le informazioni dei suoi amici in questo modo: Simone è come se avesse detto: «Non vedo due cappelli neri». Se li vedesse, data la frase di Giulio, potrebbe concludere, che il suo è rosso.

Supponiamo ora che Sofia abbia il cappello nero. Francesco ne avrebbe concluso che il suo è rosso (infatti almeno uno dei due deve avere il cappello rosso), invece Francesco dice a Giulio che non conosce il colore del proprio cappello.

Dunque Sofia non può avere il cappello nero, e giunge alla conclusione. Da notare che la conclusione è certamente esatta sotto l'ipotesi che tutti i partecipanti siano perfettamente razionali e nessuno compia errori di ragionamento.

IL DILEMMA DEL PESCATORE

Parliamo di sfruttamento sostenibile quando il prelievo di una risorsa avviene in modo da non compromettere la capacità della stessa di rigenerarsi e può quindi essere trasmessa alle generazioni future. Se una risorsa comune risulta sfruttata eccessivamente, in futuro potrà scarseggiare o scomparire del tutto (è la famosa "Tragedy of the commons"). Se i pescatori che operano nel mar Ligure decidono di pescare più acciughe possibili per poter guadagnare moltissimo vendendo il pescato, ben presto la risorsa si esaurirà perché la popolazione ittica non potrà riprodursi. Questo comportamento, se attuato, porterebbe a interrompere completamente l'attività di pesca.

È chiaro che se ci fosse una sola società questa starebbe attenta a non esagerare per non depauperare il mare e poter svolgere questo lavoro in futuro, ma se ci sono almeno due società (i giocatori) intervengono le decisioni di interazione strategica. Cosa significa? Ciascuna società (o giocatore) deve decidere tenendo conto delle decisioni dell'altra e sa perfettamente che quello che ottiene in termini di guadagno non dipende solo da quello che fa, ma anche da quello che fa l'altra società. La situazione è simmetrica per entrambi i decisori.

Le due società sanno che dovrebbero limitare la pesca perché sono a conoscenza del fatto che una pesca sconsiderata porta all'esaurimento della risorsa. Ma se una società limita la sua pesca e l'altra no, l'ambiente sarà comunque impoverito, la risorsa sparirà ma nel frattempo l'altra società guadagnerà di più.

Cosa decideranno le due società di pesca? Poiché nessuna si fida del comportamento dell'altra, ciascuna società deciderà di pescare il più possibile per avere oggi il massimo guadagno, anche a discapito dell'ambiente. Questa situazione è nota in Teoria dei Giochi come il *dilemma del pescatore*, variazione del più famoso *dilemma del prigioniero*, nome che deriva da una famosa storiella e che illustra situazioni di questo tipo che si incontrano spesso nella vita di tutti i giorni.

Possiamo rappresentare il *dilemma del pescatore* con la seguente matrice:

	C	NC
C	$3,3$	$1,4$
NC	$4,1$	$2,2$

Questa matrice rappresenta il modello matematico del dilemma raccontato. Esistono due giocatori, che sono le due società. Entrambi i giocatori hanno due strategie: uno sfruttamento moderato della risorsa, cioè un comportamento cooperativo (C) oppure uno sfruttamento sconsiderato o comportamento non cooperativo (NC). Le strategie sono rappresentate sulle righe per il giocatore 2 e sulle colonne per il giocatore 1. Le coppie di numeri che compaiono rappresentano i profitti che i decisori ottengono e tale profitti dipendono anche dalla strategia usata dall'altro decisore. Il primo numero è il profitto del primo giocatore e il secondo numero è il profitto del secondo. Se entrambe le società decidono di cooperare nel non eccessivo sfruttamento della risorsa allora esse ottengono un buon profitto (stabiliamo sia uguale a 3), se una società coopera nel senso che non sfrutta eccessivamente la risorsa e l'altro non coopera cioè la sfrutta eccessivamente, allora la prima ottiene un profitto pari a 1 e l'altra 4. Questi numeri stanno ad indicare che il giocatore più aggressivo avrà la meglio momentaneamente, e l'altro ottiene molto meno. Se entrambi non cooperano, cioè sfruttano la risorsa in modo intensivo allora entrambi ottengono un 2 che sta ad indicare un numero più piccolo di 3 ma maggiore di 1.

Quali saranno le strategie da usare per ottenere il miglior risultato possibile? È evidente che sarebbe meglio una cooperazione delle parti, cioè un sfruttamento moderato della risorsa, entrambi i giocatori otterrebbero 3 che è meglio di 2 e di 1. Ma entrambi i giocatori non si fidano dell'altro, anche se a parole l'altro decisore ha promesso di rispettare l'ambiente. In mancanza di un accordo vincolante e della fiducia nell'altro, entrambi i giocatori saranno allora portati a decidere per lo sfruttamento intensivo della risorsa perché se "io coopero e l'altro no, ottengo troppo poco e la risorsa si esaurisce comunque". LA RICERCA DEL MASSIMO RENDIMENTO INDIVIDUALE PORTA AL PEGGIOR RENDIMENTO COLLETTIVO.

Questo modello può essere adattato a tante altre situazioni reali, probabilmente lo viviamo tutti i giorni senza accorgercene. Quando tutti alzano la voce per farsi sentire, quando tutti (ricordate il Manzoni?) si mettono sulla punta dei piedi per vedere meglio in mezzo alla folla, quando decidiamo di non fare la raccolta differenziata... tanto nessuno la fa...

Ma non esiste un modo per risolvere questo dilemma e indurre la gente a cooperare? Sì! quando il gioco è ripetuto più volte. Ma, ahimè non basta un numero finito di volte: infatti se il gioco (la situazione) si ripete 10 volte, ed io sono egoista, coopererò 9 volte e alla decima non coopererò, per ottenere un profitto maggiore. Ci vorrebbero un gioco che si ripete un numero infinito di volte (sapete che ai matematici come ai poeti l'infinito piace molto), ma la nostra vita è finita! Ci vuole quindi un gioco ad *orizzonte infinito*, cioè ripetuto un numero imprecisato di volte. Ma mi fermo qui perché questo è un altro affascinante capitolo della Teoria dei Giochi.

PER APPROFONDIRE:

K. Binmore.
Fun and games: a text on game theory.
D. C. Heath & Co., Lexington MA, 1992.

G. Costa, P. Mori.
Introduzione alla teoria dei giochi.
Il Mulino, 1994.

N. Falletta.
Il libro dei paradossi.
Longanesi, 2002.

S. French.
Decision theory: an introduction to the mathematics of rationality.

Ellis Horwood, New York, 1993.

G. Hardin.
The tragedy of the commons.
Science, 162 (1968), 1243–1248.
leggi articolo

R. Lucchetti.
Di duelli, scacchi e dilemmi. La teoria matematica dei giochi.
Bruno Mondadori, 2002.

L. Pusillo.
Teoria matematica dei giochi ed evoluzione. Può la teoria dei giochi spiegare comportamenti paradossali nei comportamenti evolutivi?
PRISTEM Università Bocconi, 2005.
leggi articolo

SULL'AUTRICE:

Lucia Pusillo è ricercatrice di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova. I suoi interessi di ricerca riguardano la Teoria Matematica dei Giochi.
E-mail: `pusillo@dima.unige.it`