Un po' di matematica dietro i frattali

Dietro tante immagini frastagliate ed evocative si cela una legge dal nome divertente: *teorema di Banach-Caccioppoli o delle Contrazioni.*

L'Ambiente in cui il teorema agisce è quello degli *spazi metrici.* Preso un insieme qualsiasi (che sia di punti, o di polli, o di qualsiasi altra cosa) si definisce un concetto di distanza, un numero positivo che si associa ad una coppia di elementi e che rispetti qualche regola basilare:

- un elemento dista 0 da se stesso, un numero positivo da ogni altro;
- la distanza fra A e B è la stessa che fra B ed A;
- Se per andare da A a B passo prima da un altro punto C, allora la strada sarà sicuramente più lunga, al più la stessa, di quella diretta da A a B.

La distanza che abbiamo in mente, quella geografica, "in linea d'aria", è una distanza in senso matematico e si chiama euclidea. Non è l'unica:

- la distanza banale dice che ogni punto dista da ogni altro esattamente 1 e sempre 1 (è più strana di quello che sembra);
- la distanza Manhattan è come in figura:

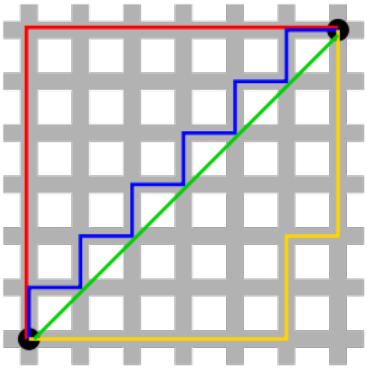


Figura 1: Geometria del taxi (o metrica Manhattan): le linee rossa, blu e gialla nella geometria del taxi hanno tutte la stessa lunghezza (12). La linea verde ha lunghezza $\sqrt{72} \simeq 8,4853$ nella geometria euclidea, ma continua ad avere lunghezza 12 in quella del taxi (non è quindi più corta delle altre).

I protagonisti del teorema sono le *contrazioni.* Prendiamo una trasformazione che ad un punto ne associ un altro, ad esempio ad un numero associ il suo doppio, o la sua metà, ad un pollo associ una gallina... se questa trasformazione agisce su elementi di uno spazio metrico (come il doppio e la metà, non come quella fra polli) allora possiamo misurare quanto distano due punti prima e dopo la trasformazione.

Alcune trasformazioni riducono le distanze e vengono chiamate contrazioni (per i pignoli, devono essere lipschitziane, contrarre di un fattore $L < 1$). Quella che associa ad ogni punto il suo doppio non è una contrazione; prendiamo l'intervallo $[0, 1]$ (il segmento di lunghezza unitaria) e raddoppiamo ogni suo punto: 1 va in 2; $\frac{1}{2}$ va in 1, tutto l'intervallo si ingrandisce e diventa $[0, 2]$, sicuramente non si è "contratto".

La trasformazione che divide per tre, ossia

$$T_1(x) = \frac{x}{3} \tag{1}$$

è una contrazione e "schiaccia" l'intervallo $[0, 1]$ in $[0, \frac{1}{3}]$.

L'ultimo personaggio del teorema è il *punto fisso*, un punto che non cambia dopo averlo trasformato, in formule

$$T(P) = P$$

Nei due casi precedenti c'è un punto fisso ed è 0 ($2 \cdot 0 = 0$; $\frac{1}{3} \cdot 0 = 0$); nella trasformazione che prende un punto e lo sposta a destra di un'unità invece non ci sono punti fissi (non esistono x tali che $x + 1 = x$); la *radice quadrata* ha due punti fissi, lo 0 e l'1.

Cosa dice il teorema allora? *Se prendiamo uno spazio metrico e una contrazione allora sicuramente esiste un unico punto fisso!* (Sempre per i pignoli, lo spazio deve essere anche completo e la contrazione dall'insieme in sé) Non solo!

Se prendiamo un punto *qualsiasi* dello spazio in questione e lo trasformiamo, poi trasformiamo quello che abbiamo ottenuto, poi trasformiamo ancora, e ancora, ancora, ci avviciniamo al punto fisso e, all'infinito, lo raggiungiamo. Su $[0,1]$ la trasformazione (1) è tale che $T_1(1) = \frac{1}{3}$, trasformando ancora $T_1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$, trasformando n volte $T_1^n(1) = \frac{1}{3^n}$, un numero sempre più piccolo che tende a diventare 0, l'unico punto fisso.

Ora, finché prendiamo insiemi di numeri reali, come $[0,1]$, i punti fissi sono solamente dei numeri un po' particolari, ma... *un frattale è punto fisso di qualcosa di più interessante.* Dobbiamo identificare quindi il tipo di trasformazione e l'insieme sul quale è definita, con la sua distanza.

Partiamo dallo spazio: i frattali sono *insiemi* di punti, che siano della retta reale (come l'insieme di Cantor, di cui parleremo), del piano (il fiocco di neve di Koch, il triangolo di Sierpisnki, la felce di Barnsley), o in dimensione più alta; quindi lo spazio d'interesse sarà una *classe di insiemi* (ancora per i pignoli, i compatti non vuoti di $\mathbb{R}^n$). Uno spazio metrico esige una distanza, una distanza fra insiemi in questo caso: quanto dista questo quadrato da questo tondo? Quanto distano due cerchi concentrici? Una distanza *ad hoc* c'è e si chiama *distanza di Hausdorff*.

Perfetto, lo spazio c'è, ora servono delle trasformazioni tra insiemi, una potrebbe essere la seguente: prendiamo un quadrato, applichiamo $T = (\textit{ruota intorno al centro di } 45°)$, e otteniamo un quadrato "a rombo". Questa trasformazione non ha punti fissi (insiemi fissi), tanto meno insiemi fissi frattali. Non ci interessano *tutte* le trasformazioni, ma solo quelle che *si ereditano da trasformazioni tra punti*; spiego. Prendiamo la funzione di prima, (1), definita su elementi di $[0,1]$; questa prende numeri e restituisce numeri

$$\frac{1}{2} \longmapsto \frac{1}{6};\ 1 \longmapsto \frac{1}{3};\ 0 \longmapsto 0$$

ma possiamo anche pensare che sia una funzione che trasforma l'insieme $[0,1]$. In cosa? In $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ovviamente! T_1 comprime l'intervallo iniziale verso lo zero, di un fattore 3; se la applichiamo di nuovo otteniamo $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, poi $\left[0, \frac{1}{12}\right]$; e qual è l'insieme che compresso rimane se stesso? Qual è l'insieme fisso? $\{0\}$, l'insieme che contiene il solo numero 0!

Altro esempio, sia T_2 la funzione che divide per 3 un numero del segmento unitario $[0,1]$, poi ci somma $\frac{2}{3}$

$$T_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \tag{2}$$

Se guardiamo T_2 come funzione che trasforma l'intero $[0,1]$, cosa succede? Otteniamo $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. T_2 comprime, sempre di un fattore 3, ma verso l'1; l'insieme fisso questa volta è proprio $\{1\}$!

Tutto ciò non sembra interessante, perché abbiamo sostituito i *punti* fissi con *insiemi* fissi che sono praticamente un numero tra parentesi graffe. Non sembra interessante e invece... e invece niente, non lo è, perché non sono ancora queste le trasformazioni giuste. Infatti, invece di prendere T_1 o T_2, consideriamo la trasformazione $(T_1 \cup T_2)$ (T_1 unito T_2) che parte da un insieme S e fa così:

- Applica T_1 ottenendo $T_1(S)$;
- Applica T_2 ottenendo $T_2(S)$;
- Considera l'unione di $T_1(S)$ e $T_2(S)$.

Ad esempio, con (1) e (2):

- T_1 trasforma $[0,1]$ in $T_1([0,1]) = \left[0, \frac{1}{3}\right]$;
- T_2 trasforma $[0,1]$ in $T_2([0,1]) = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$;
- $(T_1 \cup T_2)$ trasforma $[0,1]$ in $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, ossia prende il segmento unitario e taglia il terzo centrale.

Ci siamo. Se $\{0\}$ era un insieme fisso di T_1 e $\{1\}$ lo era per T_2, $(T_1 \cup T_2)$ *non* ha né $\{0\}$, né $\{1\}$, né $\{0,1\}$ come insiemi fissi!

$$(T_1 \cup T_2)(\{0,1\}) = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

Ma $(T_1 \cup T_2)$ è una contrazione perché lo sono T_1 e T_2, quindi per il teorema di Banach Caccioppoli deve esistere un insieme fisso, quindi proviamo ad iterare questo sistema di funzioni per trovarlo; $(T_1 \cup T_2)$ agisce su $[0,1]$ tagliando il terzo centrale, quindi continuando ad applicare...

...si ottiene il punto fisso, *l'insieme di Cantor*. I punti fissi di sistemi di funzioni definite su insiemi sono i *frattali auto-similari*!

La curva del drago si ottiene allo stesso modo ma sul piano $\mathbb{R}^2$ con le due trasformazioni seguenti:

$$f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La prima consiste in una rotazione di 45° intorno all'origine, seguita da una compressione (un'omotetia) di fattore $\sqrt{2}$; la seconda è praticamente la stessa, ma con una rotazione di 135° e seguita da una traslazione verso destra di un'unità. Si può notare che il prodotto per $\frac{1}{\sqrt{2}}$ comprime le figure, rendendo entrambe le funzioni delle contrazioni.

Se invece di $\mathbb{R}^2$ consideriamo il piano complesso $\mathbb{C}$ (per chi non lo conosce, saltate oltre) la trasformazione ha una scrittura molto più semplice:

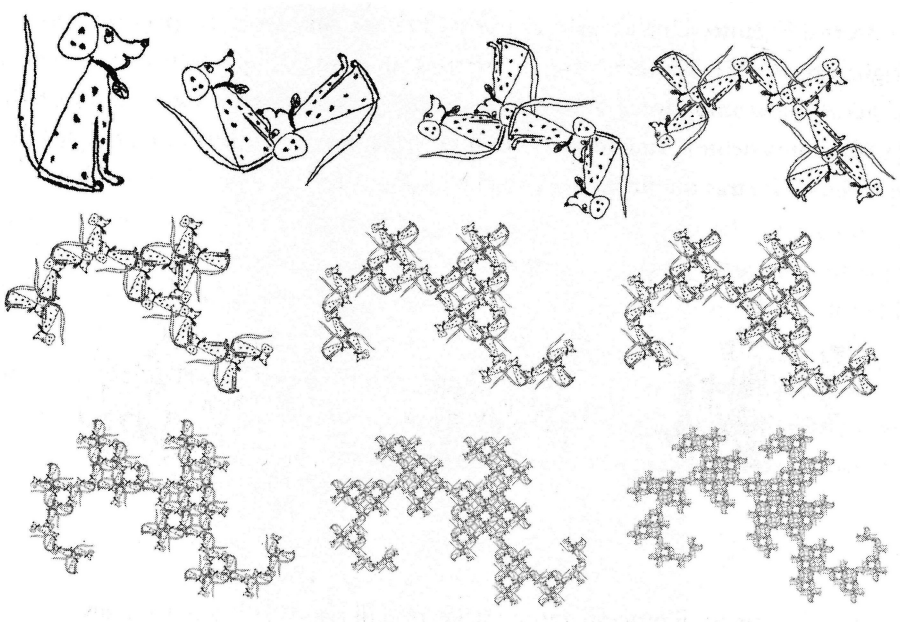
$$f_1(z) = \frac{(i+1)}{2} z$$

$$f_2(z) = 1 - \frac{(i-1)}{2} z$$

La felce di Barnsley. Ovviamente le trasformazioni non devono essere per forza due; il triangolo di Sierpinski è limite di un'unione di 3 trasformazioni (facile capire quali), così come lo è la felce suddetta, che è generata dalle tre seguenti funzioni (sono 4, ma una è per lo stelo)

$$f_i(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

dove i può essere $1,2,3,4$ e indica la trasformazione e i parametri sono i seguenti:

i	a	b	c	d	e	f
1	0	0	0	0,16	0	0
2	0,85	0,04	−0,04	0,85	0	1,6
3	0,2	−0,26	0,23	0,22	0	1,6
4	−0.15	0,28	0,26	0,24	0	0,44

In conclusione. In nessuno dei due casi presentati è servito specificare qual è l'insieme dal quale partire per applicare iterativamente il sistema di trasformazioni, e non è un caso! La seconda parte del teorema delle contrazioni specifica che da *qualsiasi* insieme si parta, si arriverà *sempre* all'*unico* insieme fisso. Un perfetto meccanismo di controllo anche per la Natura quindi! Qualunque sia la partenza, alla fine si arriverà sempre a formare quella felce, quell'albero, quella foglia. Anche partendo da un disegno qualunque, alla fine...