Madd-Spot
La serie speciale di articoli divulgativi di Maddmaths!

Web site
http://maddmaths.simai.eu/

CON QUALE MATEMATICA SI MESCOLA UN MAZZO DI CARTE?

DI CLAUDIA MALVENUTO

La *mischia all'americana* (*riffle shuffle*), è il metodo più diffuso per mescolare un mazzo di carte (Figura 1). Il mazzo viene tagliato grosso modo a metà e poi le carte delle due metà vengono frapposte le une alle altre. La Figura 2 illustra una possibile mischia all'americana di un mazzo di 13 carte.

Figura 1: Una mischia all'americana durante una partita a poker in un bar vicino Madison, Wisconsin (©Johnny Blood).

Pochi maghi e prestigiatori hanno l'abilità manuale necessaria per fare una "mischia perfetta" all'americana (*perfect shuffle*): si tratta di tagliare il mazzo in due metà uguali, e sfogliare le due metà insieme alternandole esattamente, una sì una no. Partendo da un mazzo francese riordinato (prima i 4 assi, poi i 4 due, fino ai 4

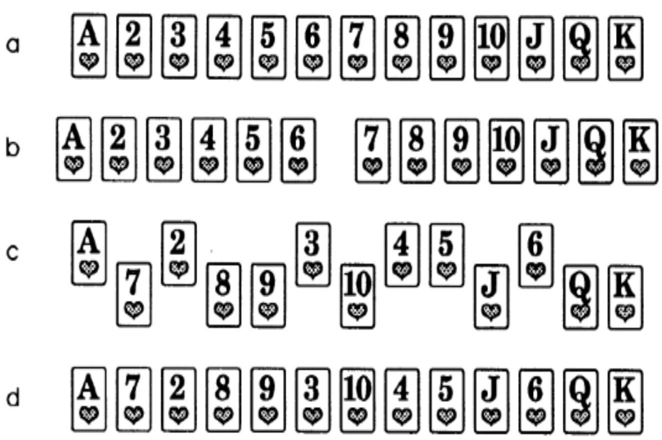

Figura 2: Un esempio di mischia all'americana. (a) Si inizia da un mazzo ordinato. (b) Il mazzo viene poi diviso in due mazzi più piccoli, di taglia simile. (c) I due mazzi così ottenuti vengono intercalati insieme. (d) I due mazzetti si possono ancora distinguere nel mazzo mescolato, perché costituiscono due successioni crescenti rispetto al valore delle carte (©Persi Diaconis).

re), dopo una mischia perfetta gli assi si trovano una carta sì e una no; dopo due mischie, si trovano a distanza di quattro carte: se il banco distribuisse a questo punto quattro mani, si ritroverebbe i quattro assi in mano! Si capisce bene l'interesse di un giocatore d'azzardo poco onesto... Si può dimostrare tra l'altro che eseguendo otto shuffle perfetti consecutivi, il mazzo torna all'ordine esatto di partenza. All'incirca un centinaio di persone al mondo riesce a fare questa operazione in meno di quaranta secondi!

È naturale chiedersi quante volte di seguito va mescolato un mazzo di carte con mischie consecutive all'americana, non necessariamente perfette, prima di poterlo considerare mescolato sufficientemente bene, tenuto conto che più volte si ripete il mescolamento, più perturbazioni casuali si introducono, migliore è il mescolamento. La risposta giusta è almeno sette, secondo Persi Diaconis, eminente professore di statistica e matematica a Stanford, precedentemente prestigiatore professionista (Figura 3). Un lavoro di Bayer e Diaconis apparso intorno all'inizio degli anni '90, fece scalpore: Diaconis, che a 14 anni era scappato di casa per seguire gli insegnamenti del grande mago Dai Vernon, grazie a questo risultato si è guadagnato la prima pagina del *New York Times* e di altre testate molto note, cambiando le leggi di Las Vegas. (Si noti che vi sono diversi metodi per mescolare le carte, non solo quello all'americana: l'analisi matematica varia a seconda del metodo scelto.)

Il primo modello matematico preciso dei miscugli di carte risale a Gilbert e Shannon (1955), e indipendentemente a Reeds (1981). Si divide in due parti un mazzo di n carte alzando k carte a sinistra (ne restano quindi $n-k$ a destra), per k che varia da 0 a n. Per stimare qual è la probabilità che il taglio avvenga proprio alla k-sima carta, facciamo riferimento al triangolo di Pascal, dove sulle righe appaiono i coefficienti binomiali, denotati $\binom{n}{k}$, numeri che contano i modi di pescare, da una famiglia con n oggetti, una sottofamiglia con k elementi:

Figura 3: Persi Diaconis (©Linda Cicerone).

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Si noti che la somma dei binomiali della n-sima riga (n è fissato e k crescente) è proprio 2^n, pari al numero totale di sottoinsiemi di un insieme a n oggetti. La probabilità che il mazzo venga tagliato in due come k ed $n-k$ carte è dunque dato dalla *distribuzione binomiale*, fornita dalla formula

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

L'asintotica della riga n-sima del triangolo di Pascal mostra che i valori più grandi della riga si hanno decisamente intorno alla parte centrale, corrispondente al valore $k = \frac{n}{2}$: il fenomeno è già visibile nel triangolo di esempio, e diventa sempre più evidente al crescere di n. Questo intuitivamente corrisponde al fatto che in genere alziamo un mazzo all'incirca a metà, mentre un taglio che lasci poche carte da una parte e le molte restanti dall'altra è improbabile.

Dopo il taglio, si esegue la mischia del mazzo: una carta cade dopo l'altra dalla mano destra o dalla sinistra a seconda della quantità di carte rimaste in ognuna delle due mani: più precisamente il modello matematico assume che una carta cadrà con probabilità $\frac{S}{S+D}$ da sinistra e $\frac{D}{S+D}$ dalla destra, dove S ed D sono il numero di carte ancora presenti nella mano sinistra e nella mano destra rispettivamente. Per esempio, se si hanno 10 carte nella sinistra e 15 nella destra, la probabilità che cada una carta dalla sinistra è $\frac{2}{5}$, mentre è maggiore e vale $\frac{3}{5}$ la probabilità che cada dalla destra. Anche questo è intuitivo: si direbbe che il peso delle due parti tenda a riequilibrarsi durante la mischia. Alcuni test sperimentali eseguiti da Diaconis nel 1988 mostrano che il modello Gilbert-Shannon-Reeds è una buona descrizione di quello che succede nella vita reale.

Usando questo modello, Bayer e Diaconis analizzano l'evoluzione della casualità in un mazzo di carte che venga mischiato un certo numero di volte. Ogni mischia porta il mazzo da uno stato a un altro con una certa probabilità. In questo contesto appaiono le cosiddette catene di Markov. Le catene di Markov forniscono un modello del comportamento di un sistema che dipende solamente dallo stato precedente del sistema. In altre parole, lo stato successivo del sistema dipende esclusivamente dallo stato attuale. Una catena di Markov nel caso discreto, che è quello in considerazione, si descrive con una matrice di transizione, dove nella casella i, j si trascrive la probabilità di andare dallo stato i allo stato j.

Tornando al problema iniziale: è possibile randomizzare completamente un mazzo di carte? Ma cosa si intende per un mazzo ordinato in modo "random"? Senza una definizione precisa, sarebbe estremamente difficile fare un'analisi probabilistica delle proprietà delle mischie di carte. Dimentichiamo – per semplificare – il valore facciale delle carte e i semi (cuori, fiori, quadri e picche), e pensiamo alle carte come la successione dei valori $1, 2, \ldots, n$. Allora il modello di una particolare mischia appena eseguita sul mazzo ordinato $1, 2, \ldots, n$ si può pensare come una *permutazione* del mazzo, che si può rappresentare sotto questa forma (per esempio con $n = 13$, la mischia della Figura 2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 7 & 2 & 8 & 9 & 3 & 10 & 4 & 5 & 11 & 6 & 12 & 13 \end{pmatrix},$$

dove la prima riga rappresenta l'ordine delle carte prima di mescolare, e la seconda riga l'ordine dopo aver mescolato. Per un mazzo di 52 carte ci sono ben $52! = 52 \times 51 \times 50 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ permutazioni distinte, un numero a 68 cifre pari a

$$80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000.$$

Si può dire che un mazzo sia ordinato in modo casuale se esso rappresenta in modo equiprobabile una delle $52!$ permutazioni diverse. Ora, partendo da un ordinamento (per esempio quello naturale), tramite una sola mischia all'americana si mostra che si possono ottenere al più 2^n tra le permutazioni possibili. Nel caso di 52 carte, pur essendo $2^{52} = 4503599627370496$, si tratta di un numero molto più piccolo di $52!$. Persino l'esecuzione di 4 mischie successive permette di realizzare solo 2^{208} permutazioni, ovvero un numero 2 milioni di volte più piccolo di $52!$. Bisognerà allora ripetere un numero ben maggiore di mischie consecutive per ottenere una proporzione soddisfacente di tutte le permutazioni possibili, e una distribuzione sufficientemente aleatoria delle carte.

Serve ancora un ingrediente, le successioni crescenti di una permutazione: esse sono costituite da numeri successivi nell'ordine naturale. Per esempio nella permutazione

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 14 & 3 & 4 & 15 & 6 & 9 & 10 & 5 & 11 & 1 & 7 & 12 & 2 & 8 & 16 & 13 \end{pmatrix}$$

le successioni crescenti massimali si estraggono dalla seconda riga e sono $(1, 2)$, $(3, 4, 5)$, $(6, 7, 8)$, $(9, 10, 11, 12, 13)$ e $(14, 15, 16)$. Quando si mischia una prima volta un mazzo ordinato come $(1, 2, \ldots, n)$, si ottengono due successioni crescenti della permutazione corrispondente al miscuglio, ovvero $(1, 2, \ldots, k)$ e $(k + 1, k + 2, \ldots, n)$, dove k è la carta in cui è stato effettuato il taglio, come si vede dalla Figura 2. In generale, all'inizio, ogni mischia moltiplica per due il numero di successioni crescenti nel nuovo ordinamento del mazzo, dunque dopo 3 mischie si avranno 8 successioni crescenti, che contengono in media $52/8 = 6{,}5$ carte. Uno dei risultati del lavoro di Bayer e Diaconis mostra che la probabilità che un mazzo di n carte si trovi nello stato rappresentato da una certa permutazione π dopo m mischie consecutive, è data dalla formula seguente:

$$p_n(\pi) = \frac{1}{2^{nm}} \binom{2^m + n - r}{n},$$

dove r è il numero di sottosuccessioni crescenti di π. Da qui, con altri passaggi che richiedono un po' di tempo, si ricava che per ottenere un mazzo aleatorio non si possono mescolare le carte meno di 7 volte anche se, per una maggiore uniformità, il numero di mischie successive ottimale sarebbe di 11 o 12 mischie, cosa però che nessun croupier farebbe, perché allungherebbe troppo i tempi di gioco.

Un modo completamente diverso di mescolare le carte, chiamato "*smoosh shuffle*" (…"smucinare" le carte, come direbbe un lettore romano!), viene usato nella maggior parte dei tornei di poker, e nel Casinò di Montecarlo quando si gioca a baccarat: si fanno scivolare a caso le carte una sull'altra a faccia in giù su un tavolo, tramite un movimento continuo delle mani. Date un'occhiata a questo video in cui Persi Diaconis ci fa capire di che si tratta.

La prossima sfida – dare un modello matematico e un'analisi probabilista per quest'ultima mischia – è appena iniziata e i primi risultati stanno per uscire.

La cosa sorprendente è come l'analisi matematica di un problema innocuo come mescolare le carte sia legata a un ampio spettro di questioni provenienti da aree come le algebre di Lie, l'omologia di Hochschild, le passeggiate aleatorie sui grafi, le algebre di Hopf in combinatoria e il prodotto di convoluzione nell'algebra delle discese. Un articolo proprio di quest'anno, dello stesso Diaconis e altri, è la prova che sul problema di ottenere un mazzo di carte randomizzato c'è ancora molto da dire.

PER APPROFONDIRE:

M. Aigner, G. Ziegler.
Proofs from THE BOOK.
Springer, 2004.

D. Bayer, P. Diaconis.
Trailing the dovetail shuffle to its lair.
The Annals of Applied Probability, 2 (1992), 294–313.
leggi articolo

P. Diaconis, S. N. Evans, R. Graham.
Unseparated pairs and fixed points in random permutations.
Advances in Applied Mathematics, in stampa.
leggi articolo

P. Diaconis, R. Graham.
Magical mathematics: The mathematical ideas that animate great magic tricks.
Princeton University Press, 2012.

P. Diaconis, C.Y. Amy Pang, A. Ram.
Hopf algebras and Markov chains: two examples and a theory.
Journal of Algebraic Combinatorics, 39 (2014), 527–585.
leggi preprint leggi articolo

C. Malvenuto, C. Reutenauer.
Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra.
Journal of Algebra, 177 (1995), 967–982.
leggi articolo

B. Mann. *How many times should you shuffle a deck of cards?*
leggi articolo

SULL'AUTRICE:

Claudia Malvenuto è ricercatrice di Algebra presso il Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma. Ha conseguito il Dottorato di Ricerca in Matematica in Canada, per il quale le è stata conferita la Gold Medal of the General Governor of Canada. I suoi interessi di ricerca comprendono la combinatoria, algebrica ed estremale, e in particolare le algebre di Hopf combinatorie.
E-mail: `claudia@mat.uniroma1.it`