

MODELLO MATEMATICO PER LA PREVISIONE METEOROLOGICA

Quante volte alzando lo sguardo al cielo abbiamo sentito dire “rosso di sera bel tempo si spera” o “cielo a pecorelle pioggia a catinelle”? La previsione meteorologica è sempre stata al centro degli interessi umani: basti pensare all'importanza che riveste nell'agricoltura, nel turismo, nella determinazione dei flussi di traffico. In passato la previsione era una disciplina completamente affidata alle capacità delle singole persone di riconoscere i “segni” dati dal cielo, e spesso conferiva a tali soggetti una posizione di prestigio nella società. Nella nostra cultura, come abbiamo detto, sono ancora molti i proverbi che si riferiscono alla previsione meteorologica, e sarebbe interessante capire se essi abbiano un seppur minimo fondamento scientifico o siano solo frutto di superstizione. Oggi i modelli meteorologici sono dei raffinati modelli matematici di elaborazione dati ed evoluzione ed hanno bisogno di una capacità computazionale che solo negli ultimi anni è stata notevolmente implementata tramite i moderni elaboratori elettronici.

Per iniziare la nostra analisi, capiamo da cosa derivi la mutevolezza del tempo. Per far questo dobbiamo descrivere da cosa è composta l'atmosfera e quali forze agiscono su di essa, L'atmosfera è un involucro gassoso che circonda la Terra, è soggetta alla sua forza di gravità e la segue nei suoi movimenti di rotazione e rivoluzione. Come mai per effetto della gravità l'atmosfera non è tutta schiacciata sulla superficie terrestre? La risposta risiede nella sua natura gassosa: i gas infatti, per natura, tendono ad occupare tutto lo spazio a loro disposizione esercitando in ogni punto di esso la medesima pressione. Ogni squilibrio di pressione che viene a crearsi genera immediatamente una forza diretta dalla pressione maggiore a quella minore tendente a ristabilire l'equilibrio originario. A causa della gravità l'atmosfera è disposta non uniformemente attorno alla superficie terrestre ma con densità, e ovviamente pressione, decrescenti dal basso verso l'alto. Esiste quindi una differenza di pressione tra la base e la sommità dell'atmosfera che genera una forza uguale e contraria alla gravità facendo sì che questa eviti di far collassare l'atmosfera in uno straterello adiacente alla superficie terrestre. In assenza di altre forze l'atmosfera rimarrebbe in equilibrio, ossia in condizioni *barotropiche*, risultando praticamente statica. In realtà il differente riscaldamento della superficie terrestre, provoca gradienti orizzontali di temperatura e di conseguenza le superfici di ugual pressione e di ugual densità tenderanno ad inclinarsi mutuamente generando le cosiddette condizioni *barocline*.

Detto questo, passiamo a descrivere cosa sia un opportuno modello matematico che descriva l'evoluzione meteorologica. Un modello matematico è basato sulle equazioni di conservazione che descrivono la variazione del tempo meteorologico. Questo vuol dire che esistono delle equazioni, che seppur complicate, descrivono l'evoluzione meteorologica del sistema una volta noti i valori della configurazione iniziale del sistema. Tali equazioni costituiscono un sistema di equazioni differenziali, ovvero equazioni che mettono in relazione funzioni con le loro derivate e in cui le incognite da determinare sono proprio le funzioni che appaiono. Nel nostro caso le equazioni hanno come incognite la pressione, la densità, le componenti del vento lungo le tre direzioni.

In principio non è detto che un sistema di equazioni differenziali ammetta una soluzione chiusa, ovvero che sia possibile scrivere esplicitamente le funzioni incognite. Anche nel nostro caso avviene questo. Esistono diverse strategie matematiche per ovviare a questo problema, una di queste consiste nella discretizzazione del modello: si crea cioè un reticolo discreto di valori della funzione incognita in modo da approssimare il valore della derivata della funzione in un certo punto, con la differenza dei valori della griglia che la funzione assume vicino a quel dato punto mediata sull'ampiezza dell'intervallo stesso. Più i valori corrisponderanno a punti spazialmente

vicini più il modello risulterà efficiente.

Le equazioni che compaiono in questo particolare contesto sono dette di Navier-Stokes, e costituiscono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che descrivono il comportamento di un fluido dal punto di vista macroscopico. L'ipotesi di base è che il fluido possa essere modellato come un continuo deformabile. Esse presuppongono perciò la continuità del fluido in esame, ovverosia il sistema perde di validità nello studio di un gas rarefatto. In questo paragrafo verranno ricavate tali equazioni.

Come accennato, l'*integrazione* delle equazioni, ovvero la loro risoluzione, richiede la conoscenza delle condizioni iniziali (stato dell'atmosfera ad un certo istante) che vengono definite dalle procedure di assimilazione dati. Il contributo dell'uomo è ancora oggi decisivo perché se si conoscono i limiti e gli errori sistematici del modello matematico usato si può correggere la previsione. Inoltre se si ha a disposizione più di un modello matematico si deve selezionare il modello sul quale basare la previsione, il che implica capacità di riconoscimento di schemi e conoscenza delle prestazioni dei modelli.

Dati i valori di “input” al sistema, il modello matematico viene fatto evolvere secondo delle simulazioni numeriche, tali simulazioni forniscono i valori approssimati della soluzione al nostro sistema di equazioni che descrive l'andamento di un evento meteorologico. Questo punto è di fondamentale importanza anche per le problematiche che presuppone. Infatti la natura caotica dell'atmosfera, l'errore nelle condizioni iniziali e dei modelli atmosferici implicano che le previsioni numeriche divengano meno accurate quando aumenta l'intervallo della previsione.

Vediamo più da vicino come, si è cercato di far fronte ai problemi appena menzionati.

Il concetto moderno di previsione numerica fu ideato dal matematico L.F. Richardson (1881-1953); egli sosteneva che si potesse passare da una condizione attuale dell'atmosfera a una condizione futura, attraverso un procedimento matematico che non richiedeva modelli meccanici e ideò un metodo di calcolo mediante il quale si sarebbe potuto effettuare tale passaggio. Questo metodo è noto come *step-by-step integration* o *processo di integrazione per approssimazioni successive* di una equazione differenziale.

L'atmosfera, come abbiamo detto, è un fluido il cui comportamento è regolato da leggi fisiche che sono riassunte nelle equazioni del moto e della termodinamica. È possibile risolvere teoricamente queste equazioni, cioè si possono trovare velocità, temperatura e pressione, mediante operazioni matematiche, purché siano noti lo stato dell'atmosfera a un istante determinato e i valori al contorno, ossia il comportamento del sistema sulla superficie della Terra e al top dell'atmosfera. La soluzione ottenuta dovrebbe descrivere il comportamento dell'atmosfera per un periodo di tempo indefinito e, teoricamente, il problema della previsione meteorologica potrebbe considerarsi risolto in modo definitivo.

In un sistema di previsioni basato esclusivamente su metodi matematici si incontrano almeno tre difficoltà. La prima riguarda le equazioni della dinamica dei fluidi, cui si fa ricorso, che sono di tipo “non lineare”, il che significa che esse non possono venire risolte con metodi diretti, ma richiedono complesse tecniche matematiche. La seconda difficoltà sta nel fatto che non si può giungere a una determinazione tanto accurata e con sufficienti dettagli dello stato iniziale dell'atmosfera o di quello delle superfici che la delimitano. La terza e principale difficoltà riguarda il moto verticale che è modesto rispetto a quello orizzontale: avere strumenti in grado di rilevare la componente verticale della velocità, per esempio, è difficile a causa del suo esiguo valore numerico rispetto alle rispettive componenti orizzontali.

La ragione fondamentale dell'insuccesso del calcolo sperimentale di Richardson sta appunto

nel fatto che egli si vide costretto, con i metodi matematici da lui impiegati, a dedurre il moto verticale come la differenza fra due grandi quantità quasi identiche e, così facendo, calcolò una forte convergenza spuria.

Nonostante questi insuccessi, l'opera di Richardson è tuttora valida e il suo metodo di integrazione *step-by-step* rimane alla base delle tecniche moderne. Questo metodo è semplice in teoria, ma complesso e laborioso nella sua applicazione pratica, a meno che non vengano impiegati calcolatori numerici elettronici. La caratteristica saliente di un moderno calcolatore numerico è la velocità prodigiosa con cui esso esegue operazioni elementari. Ciò rende possibile sostituire le esatte equazioni differenziali con equazioni algebriche approssimate, che possono essere risolte dalla macchina in brevissimo tempo con procedimenti aritmetici. I dati delle osservazioni meteorologiche iniziali vengono inseriti nella macchina e il calcolatore inizia a lavorare per risolvere le equazioni centinaia di volte per centinaia di punti sopra l'area su cui è necessario avere una previsione del tempo. In questo modo, partendo dai valori osservati della distribuzione della pressione al tempo zero, la macchina procede a delineare l'andamento barico per le prossime 12 o 24 ore, a tappe successive, ciascuna delle quali corrisponde a un periodo di mezza ora o un'ora di tempo reale. La macchina elettronica può eseguire il suo compito, che richiede milioni di operazioni matematiche, in poche decine di minuti.

Il risultato finale è una carta delle previsioni bariche sulla quale il previsore può fare una previsione dello stato futuro del tempo.

Fu il norvegese Bjerknes, nel 1904, il primo geofisico ad affermare che, se l'analisi sinottica avesse potuto fornire una conoscenza completa dello stato iniziale dell'atmosfera, sarebbe stato possibile determinare lo stato futuro risolvendo le equazioni differenziali della fluidodinamica.

Il problema della previsione fisico-matematica del tempo può quindi ridursi ad un problema alle condizioni iniziali. Questo può essere comunemente suddiviso nella raccolta delle osservazioni; la determinazione dello stato iniziale tramite l'assimilazione dati; la previsione col modello numerico e la post-elaborazione, la verifica delle previsioni.

La raccolta delle osservazioni meteorologiche avviene nel quadro di cooperazione stabilito dal Programma World Weather Watch (WWW) dell'OMM. Le osservazioni meteorologiche di superficie della pressione atmosferica, della temperatura, della velocità e della direzione del vento, dell'umidità, della precipitazione, ecc., sono effettuate vicino alla superficie terrestre da osservatori addestrati o da stazioni automatiche. Le misure della temperatura, dell'umidità e del vento al di sopra della superficie terrestre si effettuano lanciando radiosonde su palloni sonda. I dati si ottengono solitamente da vicino alla superficie fino alla stratosfera, a circa 21 km. Sempre di più, vengono usati i dati dei satelliti meteorologici per la loro copertura quasi globale. Sia i satelliti polari che quelli geostazionari forniscono scandagliamenti della temperatura e dell'umidità per tutta la profondità dell'atmosfera. In confronto a dati simili forniti dalle radiosonde, i dati dei satelliti hanno il vantaggio della copertura globale, sebbene con un'accuratezza ed una risoluzione inferiori. I radar meteorologici forniscono informazioni sull'ubicazione e l'intensità delle precipitazioni, che possono essere usate per stimare l'accumulo delle precipitazioni nel tempo. In aggiunta, se si usa un radar meteorologico Doppler a impulsi, allora si possono determinare la velocità e la direzione del vento. Tutte le osservazioni sono scambiate a livello mondiale per mezzo del Global Telecommunication System (GTS), elemento del WWW. Ogni nazione è tenuta a raccogliere i propri dati di osservazione meteorologica per la trasmissione sulle reti di telecomunicazione del GTS.

Per i metodi di assimilazione, che vanno di pari passo con il maggior numero di osservazioni disponibili, è stato necessario sviluppare metodi in grado di utilizzarli e farne un uso appropriato. L'assimilazione dati è una fase fondamentale della previsione numerica del tempo atmosferico. Si tratta di una procedura che consente di fare un'analisi dello stato dell'atmosfera: tale analisi viene

data in input ad un modello meteorologico che la utilizza come condizione iniziale da cui far scaturire l'evoluzione delle diverse variabili atmosferiche. Essendo l'atmosfera uno spazio continuo, i dati disponibili non sono abbastanza per inizializzare i modelli moderni; quest'ultimi hanno un numero di gradi di libertà dell'ordine di 10^7 .

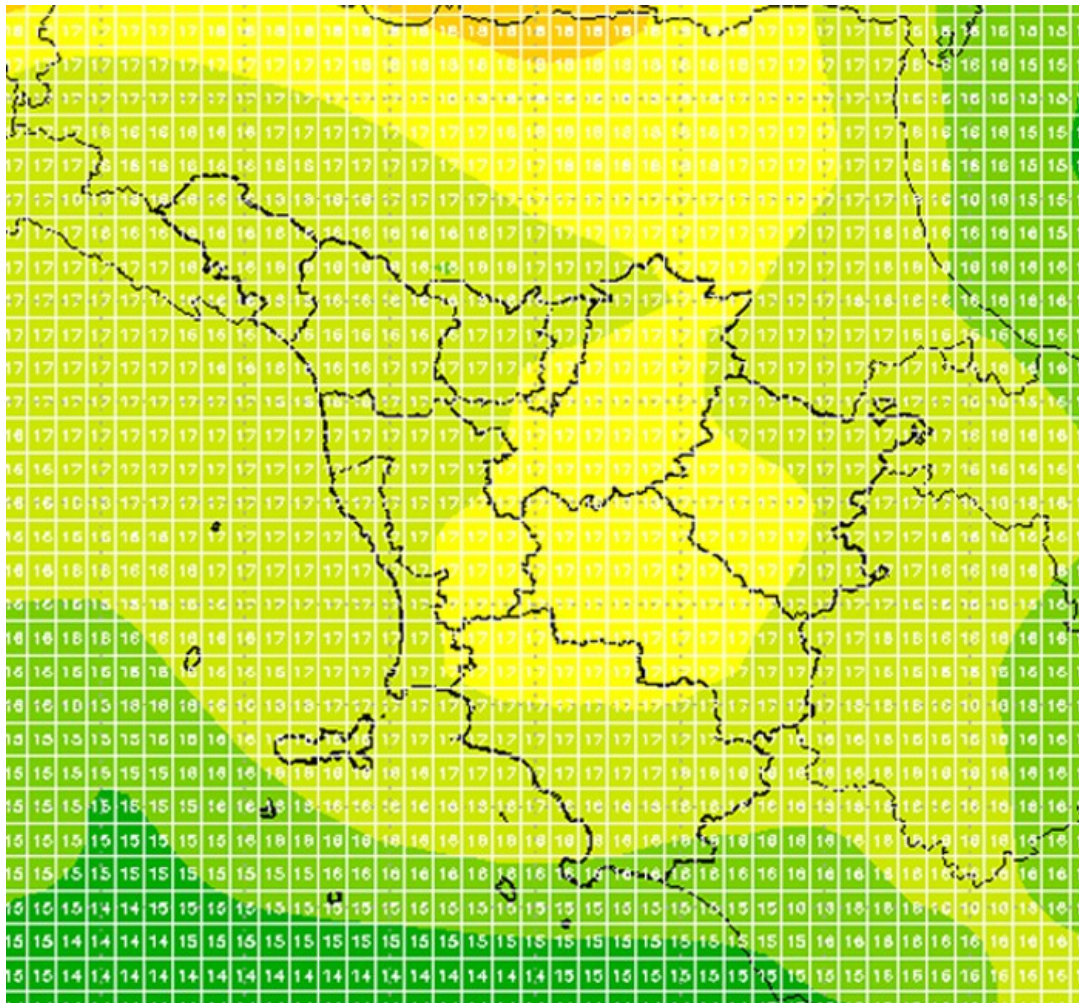


Figura 1: Esempio di reticolo dati

Per esempio, un modello con una risoluzione di 1° sia in latitudine che longitudine e con 20 livelli verticali dovrebbe avere $360 \times 180 \times 20 = 1,3 \times 10^6$ punti di griglia. Ad ogni punto di griglia si devono riportare i valori di almeno quattro variabili prognostiche (due componenti del vento orizzontale, temperatura e umidità) e la pressione superficiale per ogni colonna, dando oltre 5 milioni di variabili che necessitano di valori iniziali. Data una finestra temporale di più o meno tre ore, ci sono tipicamente osservazioni di due ordini di grandezza minori rispetto al numero di gradi di libertà del modello.

In parole povere il numero di dati necessario ad attivare il nostro modello matematico è di gran lunga superiore a quello che si ha a disposizione nella realtà. Le misure sono puntuali e quindi si avrà sempre una conoscenza per punti discreti nello spazio per di più affetta da errore, senza contare il fatto che la distribuzione di osservazioni nello spazio e nel tempo non è uniforme, con regioni come il Nord America, l'Europa e l'Asia relativamente ricche di dati rispetto ad altri.

Lo scopo dell'assimilazione è di generare la migliore approssimazione possibile dello stato reale dell'atmosfera su un griglia regolare, combinando l'informazione proveniente dalle osservazioni con quanto conosciamo a priori sul comportamento dell'atmosfera.

Un moderno sistema di assimilazione dati si compone di quattro elementi fondamentali:

1. il controllo della qualità dei dati;
2. l'analisi oggettiva;
3. l'inizializzazione dei campi numerici;
4. la previsione a breve scadenza per la stima del successivo campo di background.

La variegata natura e provenienza dei dati rende indispensabile una procedura di controllo al fine di garantirne la bontà del contenuto informativo. I dati provenienti dalla rete osservativa possono essere infatti affetti da errori di diverso tipo: errori intrinseci e errori grossolani. I primi sono riconducibili agli strumenti di misura o ad errori di rappresentatività, ovvero alla natura discreta della rete osservativa, incapace di risolvere scale inferiori alla separazione media tra due stazioni di osservazione. Con il termine errori grossolani si intendono invece quelli conseguenti ad una cattiva calibrazione, ad un'errata registrazione o codifica delle osservazioni ed errori introdotti nelle telecomunicazioni. Occorre sottolineare che questi errori possono risultare correlati, nello spazio e nel tempo, tra loro o con la situazione sinottica e ad essi possono sommarsi errori sistematici (*biases*). Pertanto gli algoritmi implementati nel controllo di qualità sono indispensabili per il rigetto o la modifica dei dati contaminati.

Negli ultimi anni ha preso il sopravvento l'idea che un paradigma di tipo probabilistico (di *ensemble*) sia più efficiente di uno di tipo deterministico. L'incertezza legata alla singola previsione deterministica, dovuta come abbiamo visto al processo di inizializzazione ed alle modalità operative del modello, non compare in modo esplicito nelle variabili calcolate e quindi non è possibile conoscere, a priori, quali siano i margini di affidabilità relativi alla previsione stessa. L'impossibilità di stabilire l'esattezza di una previsione, affidandosi ad un unico scenario deterministico, cioè quello che parte dalla miglior stima dello stato iniziale reale, ha portato ad estendere la tecnica di tipo "ensemble" alla fase di previsione. Con questo nuovo approccio lo scenario meteorologico previsto e quindi legato alla maggiore probabilità di realizzazione di un evento, ovvero alla frequenza con cui un *pattern* atmosferico ricorre nella gamma di tutte le previsioni calcolate. In altre parole, i dati (iniziali) ottenuti nella nostra analisi vengono perturbati un po' e l'*insieme* dei nuovi dati iniziali viene fatto evolvere nel modello matematico permettendo alla fine dell'elaborazione di prediligere lo scenario che si è dimostrato più *probabile* nell'evoluzione di insieme di dati iniziali. Il sistema diventa particolarmente utile nei casi in cui si verificano transizioni nei regimi meteorologici che i modelli prevedono con maggiore difficoltà: questo comportamento si osserva sia quando viene prevista la fase iniziale in innesco del nuovo regime atmosferico, sia quando il modello prevede la sua fine, in cui la circolazione annessa si esaurisce per lasciare il posto ad una nuova transizione. L'idea che sta alla base della costruzione di un *Ensemble Prediction System* (EPS) è quella di avere a disposizione un grande numero di stati possibili dell'atmosfera, prelevati dalla *Probability Density Function* (PDF) dell'incertezza delle condizioni iniziali nello spazio delle fasi.

D'altra parte, poiché ad ogni stato, una volta evoluto, corrisponde una previsione deterministica, il modello numerico procede ad integrare le equazioni di governo tante volte quanti sono gli stati scelti nella funzione iniziale di probabilità, comportando una considerevole spesa di calcolo. A causa di questo procedimento adottato, si intuisce che il tempo utilizzato dal modello per effettuare tutte le integrazioni rappresenta un fattore limitante per i centri di previsione numerica: ciascuno di questi deve quindi dare, preventivamente, un giudizio di bilanciamento soggettivo sul numero di membri dell'ensemble da includere nell'EPS, in relazione alla risoluzione spaziale del modello numerico a disposizione per integrarli in tempo utile. Essendo, di conseguenza, le dimensioni dell'*ensemble* della previsione operativa condizionate dal fattore temporale, e quindi importante che le condizioni iniziali siano scelte in modo opportuno, tenendo presenti i due requisiti a cui deve sottostare una PDF per essere giudicata corretta.

Il primo requisito afferma che il campione degli stati iniziali deve fornire una stima realistica della distribuzione di probabilità degli errori dell'analisi; mentre il secondo requisito dice che le traiettorie dello spazio delle fasi calcolate dal modello numerico devono essere buone approssimazioni delle traiettorie atmosferiche. Circa il primo requisito, su cui si è concentrata la ricerca negli ultimi anni, si pone un problema di notevole difficoltà, sia pratica che teorica. Innanzitutto, la PDF dell'errore dell'analisi è scarsamente conosciuta e, in secondo luogo, il numero delle direzioni indipendenti nello spazio delle fasi, attraversate dalla funzione di probabilità, supera di diversi ordini di grandezza la dimensione massima possibile dell'*ensemble* che può essere supportata da un modello realistico di previsione numerica. Per questi motivi, l'idea di prelevare del tutto casualmente alcuni stati iniziali dalla PDF come condizioni perturbate non può essere, in pratica, realizzata perché non produrrà una distribuzione realistica degli stati previsti. Per ovviare a questo problema, ogni centro mondiale di meteorologia che si occupa di previsioni probabilistiche ha sviluppato, nel corso degli anni, diverse tecniche (*Singular Vector*, *Ensemble Kalman Filter*, *Breeding Vector*) per generare le piccole perturbazioni da sommare poi all'analisi imperturbata e creare così l'insieme degli stati iniziali da far evolvere applicando le equazioni di governo dell'atmosfera.

Esempio

Come appena detto, per creare una previsione di tipo *ensemble* è necessario, innanzitutto, perturbare l'analisi iniziale per determinare un certo numero di stati che sia rappresentativo di un volume di incertezza individuato dalla PDF dell'errore al tempo $t = 0$. Ogni singolo elemento presente all'interno dello spazio delle fasi è un punto di partenza da cui il modello integrerà uno stato iniziale perturbato dell'atmosfera per generare una previsione deterministica fino ad una scadenza temporale fissata dal centro operativo: l'evoluzione della PDF e infatti approssimata dalle traiettorie intraprese da tutti i punti iniziali che costituiscono il campione rappresentativo della distribuzione di densità di probabilità.

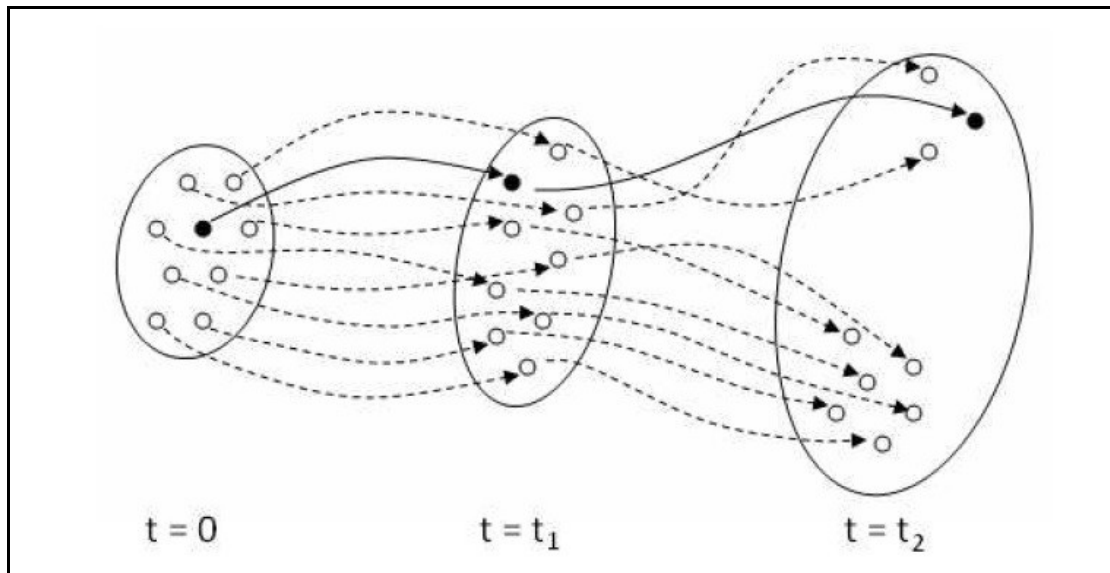
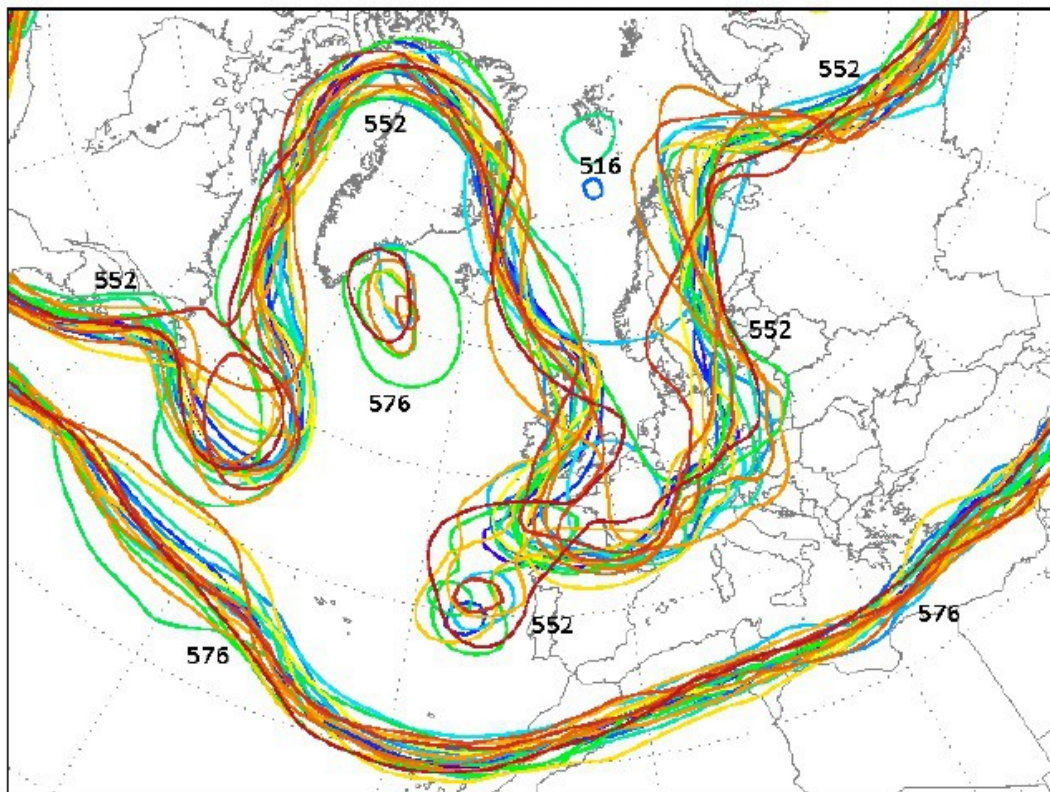


Figura 2: Evoluzione di un ensemble

La Figura 2 illustra la natura della previsione di *ensemble* in uno spazio delle fasi bidimensionale idealizzato. Al tempo $t = 0$, all'interno della prima ellisse, sono contenuti sia lo stato imperturbato (cerchio pieno), sia gli stati iniziali perturbati che rappresentano un plausibile stato dell'atmosfera consistente con le incertezze derivanti dalle osservazioni e dal processo di analisi: tutti questi punti generano un *ensemble* delle condizioni iniziali e definiscono una serie di situazioni meteorologiche relative alla variabile atmosferica che si vuole prevedere (temperatura a 850 hPa, altezza di geopotenziale a 500 hPa, pressione al suolo, ecc, ecc. . .). L'evoluzione di ogni singola previsione è descritta dalle linee che individuano le traiettorie percorse: quella che descrive la propagazione dello stato imperturbato, detto elemento di controllo, e distinguibile dalle altre che sono tratteggiate. Nel caso ideale rappresentato possiamo quindi osservare, oltre allo stato imperturbato, la presenza di altri otto membri: questo *ensemble*, formato complessivamente da nove stati iniziali, approssima quindi le variazioni rappresentate dalla distribuzione integrale da cui sono tratte. Osservando l'evoluzione della PDF, si nota che le traiettorie di ciascun membro dell'*ensemble* sono, a $t = t_1$, poco differenti l'uno dall'altra: questo significa che le nove integrazioni del modello numerico producono previsioni abbastanza simili durante il primo *step* di previsione: di conseguenza, la distribuzione di probabilità che descrive l'incertezza sullo stato dell'atmosfera in questa fase della previsione non sarebbe molto più grande di quella che si ha all'istante iniziale. Ad un istante successivo ($t = t_2$), invece, le traiettorie divergono sensibilmente, con tre previsioni simili tra loro che evolvono verso un particolare scenario meteorologico ed i rimanenti sei membri dell'*ensemble* che prevedono altri stati atmosferici: per questo motivo è plausibile che l'evoluzione più probabile sia rappresentata dallo scenario indicato dal maggior numero di elementi che appaiono simili tra loro. Ecco, da qui, perché si parla di previsione probabilistica. La dispersione osservata nell'ultima previsione permette di stimare la natura della distribuzione che è indicativa dell'incertezza della previsione: infatti, se si avesse avuto a disposizione solamente la previsione inizializzata con lo stato imperturbato, questo tipo di informazioni non sarebbero disponibili e si avrebbe dato credito ad una previsione poco affidabile.

Ini: Wed,05MAY2010 00Z Val: Sun,09MAY2010 00Z
500 hPa Geopotential (Isohypsens: 516 552 576 gpdam)



Daten: Ensembles des GFS von NCEP

Figura 3: Esempi di ensemble

In Figura 3 è riportato un esempio di previsione di *ensemble* a +96 ore di tre isoipse (516. 552. 576 dam) riferite all'altezza di geopotenziale per la quota isobarica di 500 hPa. Dall'osservazione della dispersione del fascio di linee colorate, ciascuna delle quali rappresenta una previsione deterministica, si può concludere che la probabilità della localizzazione dell'isoipsa di 576 dam è sufficientemente alta, in quanto le previsioni sono tra loro molto vicine; mentre per quella relativa alla 552 dam si hanno alcune incertezze, in particolare sull'Europa occidentale. Se, infatti, la maggior parte degli scenari propende per la genesi di una circolazione ciclonica sulla Francia, alcune evoluzioni vedono invece la possibilità che la suddetta figura barica vada a formarsi al largo delle coste portoghesi, comportando di conseguenza una diversa distribuzione della fenomenologia meteorologica che da tale configurazione viene a generarsi. Avere comunque una maggiore frequenza di previsione che inquadra una posizione più settentrionale della struttura associa a questo scenario una probabilità più elevata che possa verificarsi. Dell'*ensemble* si utilizza poi la media, la quale è dimostrato che fornisce una previsione che è più accurata di ogni singola previsione dell'*ensemble* (la media agisce come un filtro sugli errori) e lo *spread* (sparpagliamento), visualizzabile con gli "spaghetti", che fornisce una misura sull'affidabilità della previsione, ovvero sulla predicibilità di uno stato futuro.