LA MATEMATICA UMIDA DELL'EVOLUZIONE

Frazioni, Conigli, Approssimazioni e Girasoli

Il regno vegetale ci regala il primo esempio di matematica umida:

La perfezione è ipnotica; sta a noi interpretarla, come critici di fronte ad un'opera d'arte.
Perché queste spirali che si intersecano? Non sembrano posizionate lì casualmente,
devono avere un che di speciale,

la Natura seleziona forme matematiche per ottenere vantaggio evolutivo

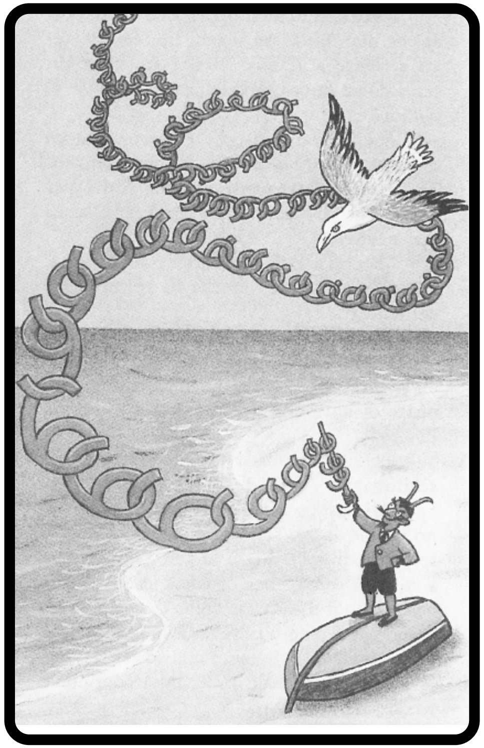
Per capire ed arrivare ad apprezzare l'importanza di questo vantaggio,
esclamare "l'Evoluzione ne sa una più del diavolo!", bisogna partire lontano...

In matematica si indica con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri *razionali*, le frazioni, quei numeri nella forma

$$\frac{p}{q}$$

con p un numero *intero* (ossia *..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...*)

e q un numero *naturale* non nullo (ossia *1, 2, 3, 4, 5, ...*)



Ogni frazione è anche un numero decimale

$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}333333\ldots$$ *(avanti fino alla noia)*

$$\frac{5}{1} = 5$$

È facile convincersi che tutte le frazioni danno luogo a sviluppi decimali *finiti* (come quelli in rosso), oppure *infiniti ma periodici* (come quello in blu e il disegno)

E tutti gli altri?

Completiamo la retta dei numeri inserendo gli *irrazionali*, i numeri con sviluppo decimale *aperiodico* (modo forbito per dire *a caso*), come

$$\pi = \mathbf{3{,}1415\ldots}$$

$$\sqrt{2} = \mathbf{1{,}4142\ldots}$$

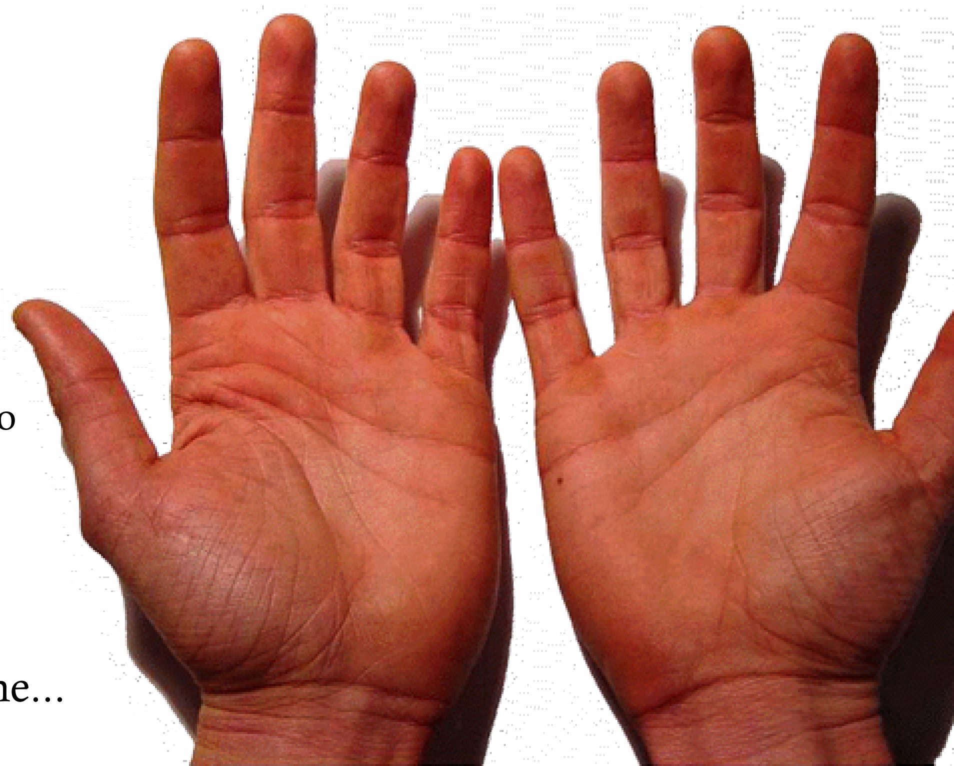
(e avanti all'infinito senza logica apparente)

Razionali e *irrazionali* formano l'insieme dei *reali*, indicato con $\mathbb{R}$

Ma c'è un motivo *valido* per il quale contiamo in base decimale?
Un motivo *valido* per il quale abbiamo dieci cifre, *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*, *8*, *9* ?

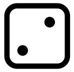
Oltre al fatto che abbiamo dieci dita **NO**,

la scelta del dieci come numero *speciale* è del tutto arbitraria, ed esistono molte altre basi numeriche, altrettanto *valide*.



Un esempio su tutti, il computer conta in base due, perché capisce solo *acceso* (1) e *spento* (0).

Ha quindi solo 0 e 1 come cifre e quello che noi indichiamo

come *due*, che è la quantità  ,

secondo il computer è **10** (una duina e nessuna unità)

Questo ci porta ad una riflessione...

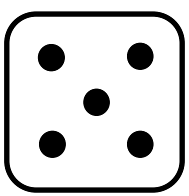
La pianta nell’immagine qui a fianco non cambia d’aspetto, sia che noi la chiamiamo *girasole*, o *sunflower*, o *sonnenblume*; è svincolata dalla sua rappresentazione a parole, dal suo nome.

Certo, per indicarla abbiamo necessità di chiamarla in qualche modo, per un fatto *pratico*, per evitare confusioni e fraintendimenti.
Non confondiamoci, i nomi sono *etichette* date per necessità.

5 in base decimale

101 in base binaria

12 in base tre



è sempre la stessa quantità!

Con i numeri vale lo stesso ragionamento; abbiamo ben presente il carattere astratto del numero?

Grazie alle cifre e alla base decimale abbiamo una maniera rapida e comoda per scrivere i numeri e far di conto,
ma le cifre *non* **sono** i numeri che rappresentano,
così come le parole *non* **sono** ciò che indicano.

Esiste una rappresentazione più *pura* dei numeri?

Qualcosa che non tenga conto della base scelta?

Una rappresentazione più *naturale* (visto che siamo in tema)?

Diamo il benvenuto alle *Frazioni Continue!*

Prendiamo un numero, come $\mathbf{\frac{27}{8}}$ e facciamo un po' di conti

facciamo la divisione

$$\frac{27}{8} = 3 + \frac{3}{8}$$

ribaltiamo la frazione

$$3 + \frac{3}{8} = 3 + \frac{1}{\frac{8}{3}}$$

facciamo la divisione con l'ultima frazione ribaltata

$$3 + \frac{1}{\frac{8}{3}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}}$$

e avanti così

$$3 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}} = \dots$$

fino ad arrivare a...

$$\dots = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Se avete saltato a pie' pari i conti nella pagina precedente, avete fatto bene!

L'importante è sapere che si può scrivere qualsiasi numero così

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots}}}$$

dove tutte le lettere rappresentano numeri *naturali* (il primo può anche essere negativo) e possono anche essere infinite (se il numero è *irrazionale*). Una scrittura di questo tipo è una *Frazione Continua* e si può indicare in maniera compatta così:

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$$

$$\frac{27}{8} = [3, 2, 1, 2] \qquad \pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \dots]$$

Sarà lei la rappresentazione pura che cercavamo?

In effetti, da nessuna parte si fanno scelte arbitrarie come quelle della base, ma da una rappresentazione *speciale* ci aspettiamo proprietà *speciali*.

Cosa hanno le frazioni continue da offrirci?

Approssimazioni con frazioni

- Ci interessa... - *A chi interessa?* - Ogni cosa a suo tempo, ci servirà a *pag.14 ...*-

- Ci interessa approssimare dei numeri irrazionali con delle frazioni. Che si intende?

Fissiamo una precisione, **10**, e dividiamo tutta la retta dei numeri in segmenti lunghi $\frac{1}{10} = 0{,}1$

$-\frac{4}{10} \quad -\frac{3}{10} \quad -\frac{2}{10} \quad -\frac{1}{10} \quad 0 \quad \frac{1}{10} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{4}{10}$

Qual è la migliore frazione *"di precisione 10"* che approssima **$\pi = 3{,}1415...$** ?

$\frac{29}{10} \quad \frac{30}{10} \quad \frac{31}{10} \quad \pi \quad \frac{32}{10} \quad \frac{33}{10}$

La frazione più vicina a π è $\frac{31}{10}$ che quindi merita il premio di

"Miglior approssimazione con frazioni *di precisione 10* di π"

Ebbene, le frazioni continue sono *perfette* per approssimazioni di questo tipo!

Ad esempio, la frazione continua (infinita) di π è

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots]$$

Se la tagliamo dopo il 7 otteniamo

$$[3, 7] = 3 + \frac{1}{7} = 3,142857...$$

Se tagliamo dopo il 15

$$[3, 7, 15] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = 3,141509...$$

che sono rispettivamente la miglior approssimazione di "*precisione 7*" e di "*precisione 106*".

Più termini consideriamo, più sale la precisione, più siamo vicini al vero numero, e con le frazioni continue questa precisione sale *molto* velocemente; con il π, con solo due passaggi, siamo già vicinissimi al vero valore, che è

$$\pi = 3,141592...$$

- Esiste comunque un numero che è **il** peggiore da approssimare di tutti -

- *In che senso?* -

- Nel senso che, se tagliamo la sua frazione continua, otteniamo sì un’approssimazione di quel numero, ma… -

- *Come tutti gli altri numeri…* -

- Esatto, ma con questo in particolare la precisione sale in maniera molto *molto* lenta. È scritto così

$$[1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots] \quad \text{oppure} \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}$$

- Questo numero merita il premio di “peggior numero da approssimare con frazioni”, o meglio,

“Numero più irrazionale fra gli irrazionali”

ed ha un nome, che è… -

- *Aspetta un attimo, va bene tutto, approssimazioni, frazioni infinite, ma tutto ciò che c’entra con i girasoli, con l’evoluzione, con la Natura?* -

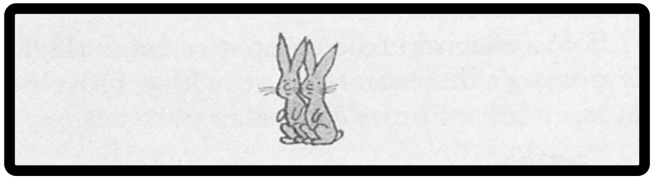
- Va bene! Il nome più tardi, facciamo un ultimo passaggio, poi tutti i pezzi andranno al loro posto…

“Un uomo mise una coppia di conigli in un luogo circondato da tutti i lati da un muro.

Quante coppie possono essere prodotte dalla coppia iniziale in un anno, supponendo che ogni mese ogni coppia produca una nuova coppia in grado di riprodursi a sua volta dal secondo mese?”

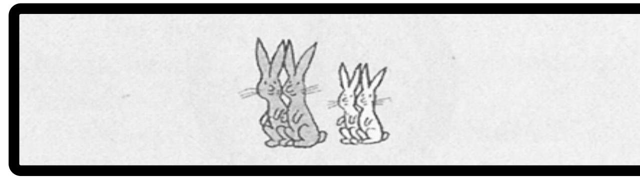
Fibonacci, Liber Abaci (1202) – Capitolo XII

"Un uomo mise una coppia di conigli in un luogo..."



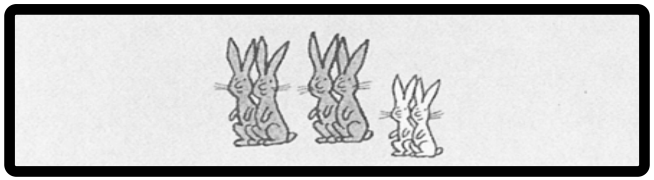
Mese 0

"...ogni mese ogni coppia produca una nuova coppia..."



Mese 1

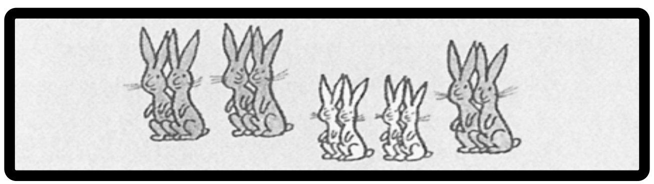
"...in grado di riprodursi a sua volta dal secondo mese..."



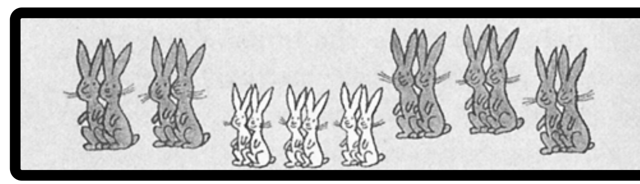
Mese 2

I giovani crescono, gli adulti hanno figli, mese dopo mese...

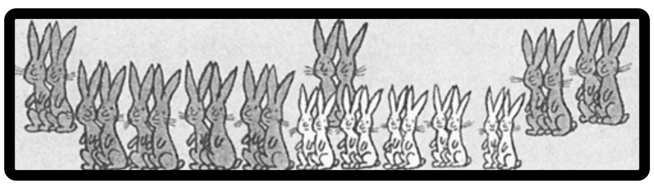
Quante coppie?



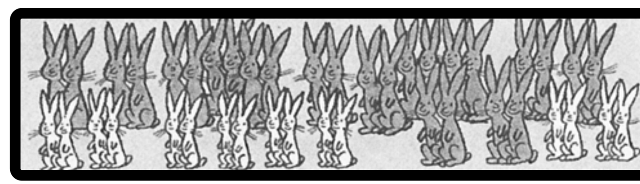
Mese 3



Mese 4



Mese 5



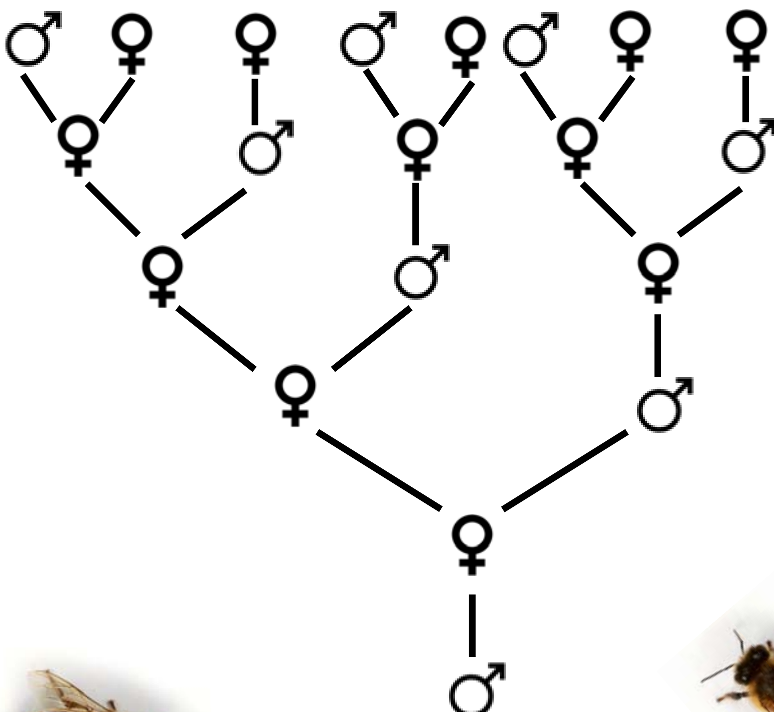
Mese 6

1, poi 2, poi 3, 5, 8, 13, 21...

E l’albero genealogico del fuco?

Il fuco, maschio dell’ape, nasce da uova deposte dalla regina ma non fecondate; di conseguenza, un fuco (♂) ha una madre, ma non un padre.

Le uova fecondate dai fuchi danno invece origine a femmine, quindi la regina (♀) ha madre e padre.



1 genitore

2 nonni

3 bisnonni

5 trisnonni

8

13

21

...

I numeri, che si ripetono non solo negli allevamenti di conigli e negli alveari (vai *all'ultima pagina*) formano la

Successione di Fibonacci

Costruirla è semplice; si parte da due numeri (1 e 2, oppure 1 e 1) e si ottiene il numero successivo sommando di due precedenti

1 2 2+1=3 3+2=5 5+3=8 8+5=13 13+8=21

Se consideriamo il *tasso di crescita* dei conigli (il rapporto fra le coppie di una generazione e quelle della generazione precedente)...

$$\frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots \qquad \frac{8}{5} = 1{,}6\ldots \qquad \frac{13}{8} = 1{,}625 \qquad \frac{21}{13} = 1{,}615384$$

...ci avviciniamo sempre più (approssimando con frazioni, è a questo che mi riferivo a *pag 8*) ad un particolare numero irrazionale che ha un nome: il numero aureo

$$\phi = 1{,}6180339887498\ldots$$

Il numero aureo ha una proprietà molto particolare, è *uguale al suo inverso, più uno*, infatti

$$\frac{1}{\phi} = 0,618033\ldots \qquad \text{ossia} \qquad \phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

Quindi ogni volta che vediamo ϕ siamo autorizzati a sostituire $1 + \frac{1}{\phi}$ (sono uguali!)

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi = 1 + \frac{1}{\phi = 1 + \frac{1}{\phi = 1 + \frac{1}{\phi}}}}$$

Quello che si ottiene non è altro che una *frazione continua*, precisamente

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{\ldots}}}$$

Un momento, l'ho già visto quello...

$$\phi$$

“Il più irrazionale fra gli irrazionali”

È tempo di tornare al girasole!

(ma prima una curiosità: il numero aureo è anche uguale a $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *, così è facile da ottenere con una calcolatrice)*

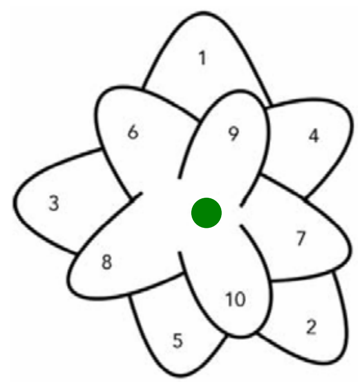
Parte 3. Due indizi fanno una prova

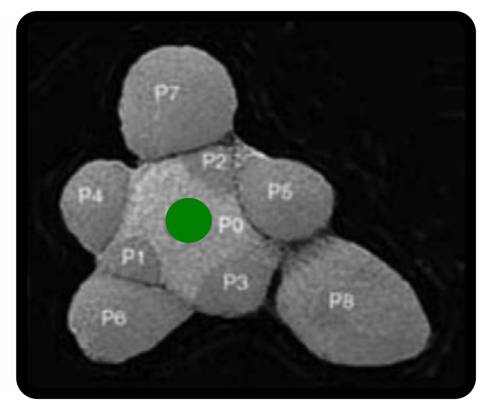
Guardiamo il girasole (*Helianthus Annuus*): quello che siamo soliti chiamare fiore è in realtà il *capolino*, o *infiorescenza*, mentre i *fiori* veri sono le piccole palline che formano le spirali, quelle che poi maturando diventeranno *semi*.

Durante lo sviluppo della pianta, al centro del disco che forma il capolino c'è l'*apice* (●), dal quale nascono i *primordi*, le strutture che daranno vita a *fiori* e *semi*.

Come si creano le infiorescenze?

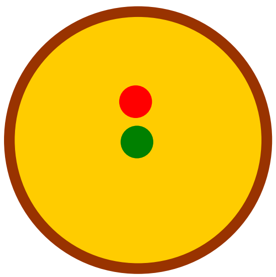
Ciascun primordio nasce *ruotato di un certo angolo* rispetto al precedente e *sposta verso l'esterno* tutti i primordi più anziani per farsi spazio.



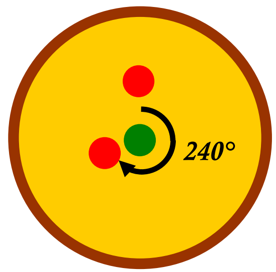


Se l'angolo è un *razionale*, una *frazione dell'angolo giro*, si ottengono infiorescenze "a rami".

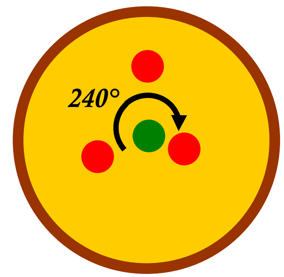
Per esempio, immaginiamo che i primordi nascano ruotati di $\frac{2}{3}$ dell'angolo giro (*240 gradi* su *360*)



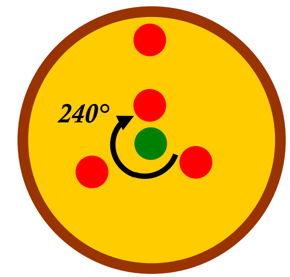
Apice e primo primordio



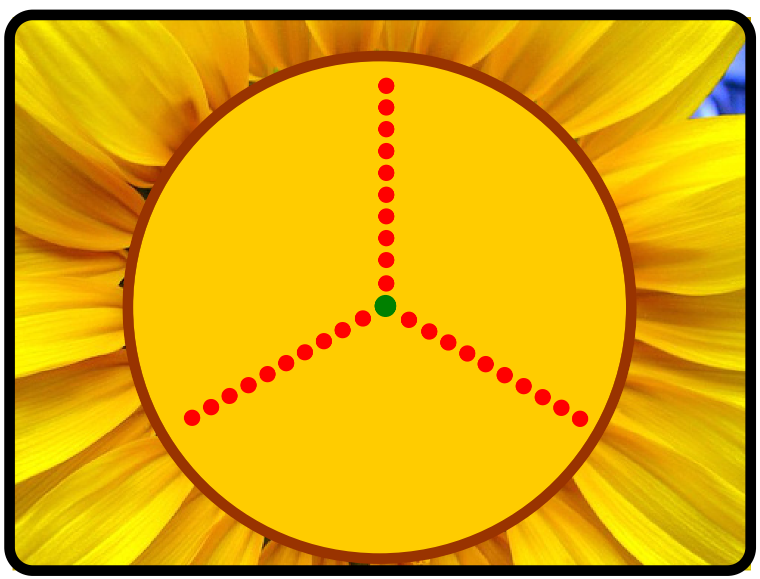
Il secondo nasce ruotato mentre il primo si sposta all'esterno



Nuova rotazione, nuovo spostamento



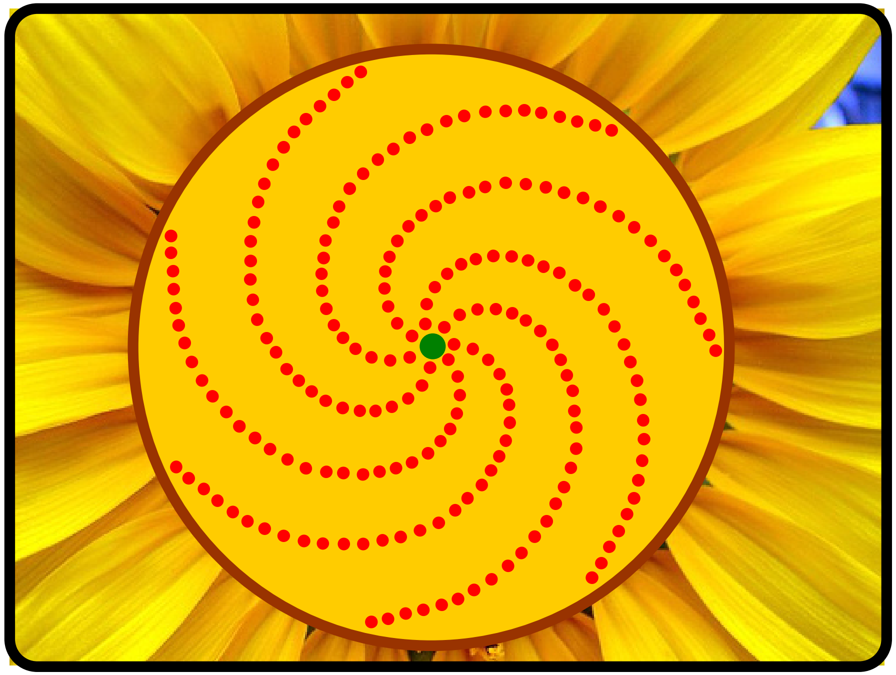
Dopo tre rotazioni, si ritorna alla situazione iniziale



Con questa scelta si crea una pianta che in natura **non** è presente, che ha grandi aree del capolino senza semi… e se si sceglie un altro numero *razionale* non si risolve molto, perché cambia solo il numero dei rami.

Se questo è il meccanismo con il quale si generano i girasoli, e con un numero *razionale* non ha funzionato, vuol dire che la natura ha optato per un *irrazionale*.

Proviamo con l'angolo dato da π. Il fiore che si ottiene è di questa forma:



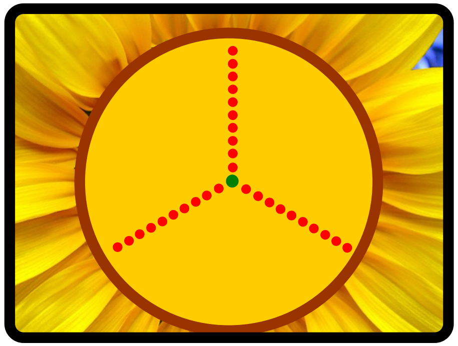
Sicuramente ora c'è meno spazio libero, ma non si può fare di meglio?

π è ancora *troppo razionale*, e più il numero è razionale, più le infiorescenze somigliano "a rami".

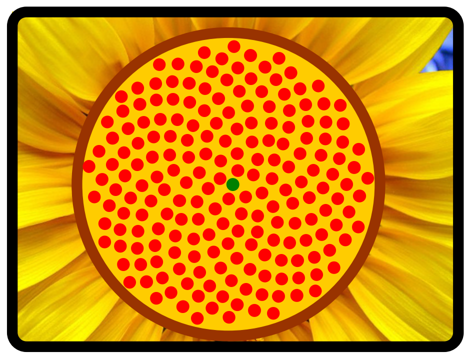
C'è bisogno del più irrazionale di tutti, e la Natura non può far altro che sbalordirci, quando sceglie come angolo proprio quello dato da ϕ, l'*angolo aureo.*

Con l'angolo aureo, le figure simulate sono **molto** realistiche.

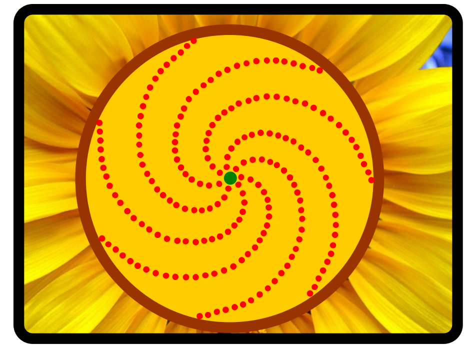
Immaginiamo (in via del tutto semplificata e irrealistica) che un fiore possegga un gene con la funzione di regolare l'angolo con il quale si formano i primordi. Mutazioni casuali modificano il gene in 5 forme diverse, ognuna con il suo angolo specifico. I cinque fiori che si sviluppano sono:



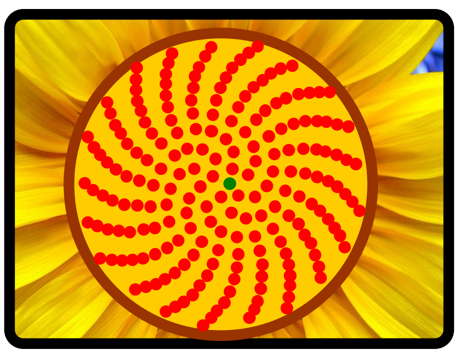
Angolo dato da una frazione, 240°



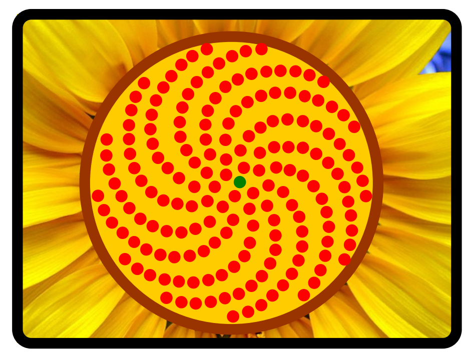
Angolo aureo



Angolo dato da π



Poco meno dell'angolo aureo



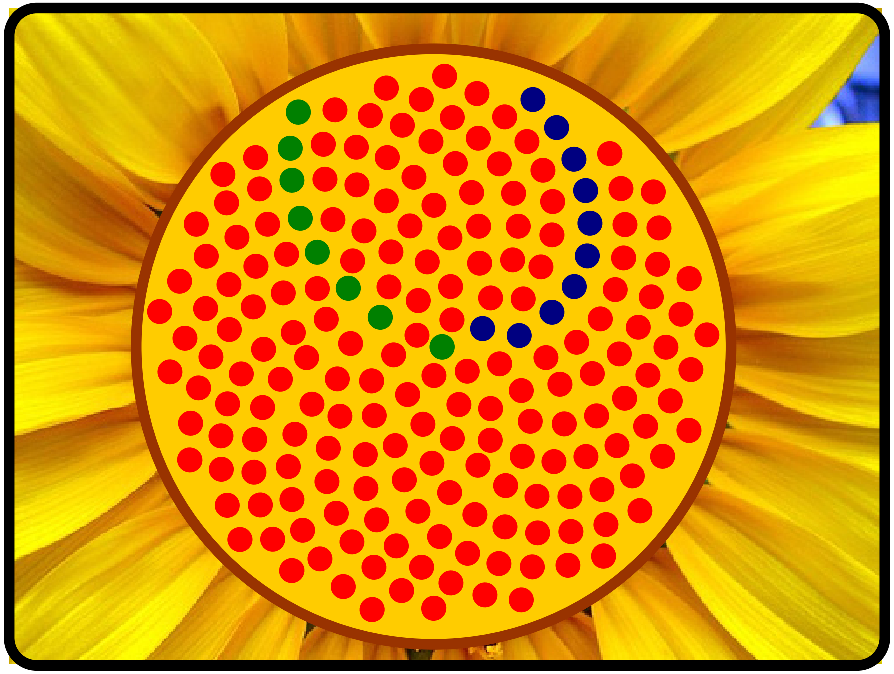
Poco più dell'angolo aureo

Se un gran numero di semi implica una maggior probabilità di poter mandare avanti la specie, quale di queste piante sarà favorita dall'ambiente? *(Domanda retorica)*

La pressione selettiva dell'ambiente ha portato alla formazione di piante che, con una singola infiorescenza, riescono a produrre tantissimi semi, ottimizzando lo spazio a loro disposizione e massimizzando la probabilità di preservare la specie.

Soprendente!

Si riconoscono molte spirali, di forme diverse!



Le spirali come quella in blu sono 21, come la verde 34.
Non è la prima volta che incontriamo questi numeri...

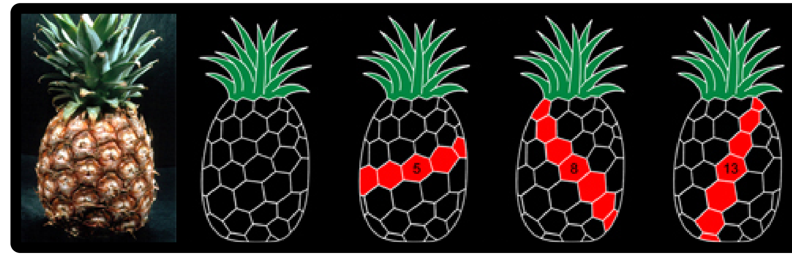
Bibliografia - per saperne di più

Il mago dei Numeri – *Hans Magnus Enzensberger*

La sezione aurea – *Mario Livio*

On Growth and Form - *D'Arcy Wentworth Thompson*

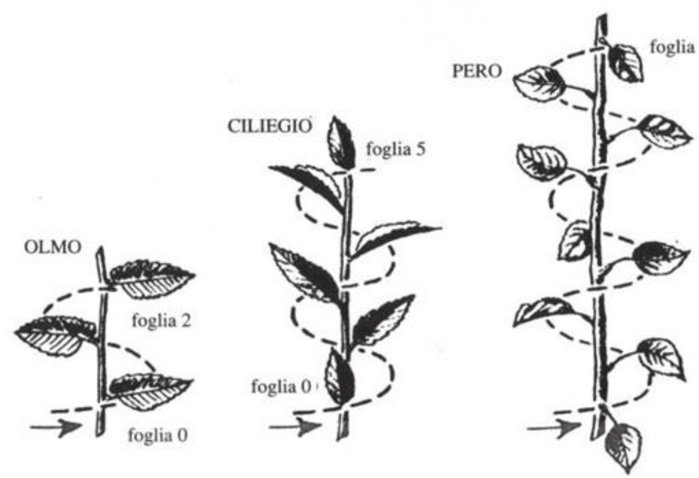
Mathematics of Life – *Ian Stewart*



L'ananas è formata di bande di vario tipo che si ripetono. Indovinate quante volte?

Fibonacci e Natura vanno parecchio d'accordo; ecco altri esempi…

I petali delle rose crescono con lo stesso meccanismo del girasole, secondo l'angolo aureo.



Disponendo le foglie intorno allo stelo secondo l'angolo aureo (o approssimazioni con numeri di Fibonacci) le piante ottimizzano l'assorbimento di luce, perché nessuna foglia (o quasi) si sovrappone alla perfezione alle altre.