MADD-SPOT, **2**, 2014

Madd-Spot
La serie speciale di articoli divulgativi di Maddmaths!

Web site
http://maddmaths.simai.eu/

SIMULARE IL SISTEMA ATMOSFERICO SU TEMPI LUNGHI: BUONE E CATTIVE NOTIZIE

DI ROBERTO FERRETTI

Per chi, come me, ha incontrato la fisica dell'atmosfera ascoltando le previsioni del Colonnello Bernacca, occuparsene in termini di ricerca è una specie di nemesi. Quel meteorologo, che negli anni '60 teneva incollata l'Italia alla televisione parlando dell'anticiclone delle Azzorre e della nebbia in Val Padana, aveva tuttavia nella vulgata la fama di azzeccarci poco con le previsioni del tempo. Eppure, ancora oggi la previsione del tempo è un problema di estrema complessità e di incerto successo.

E sì che i mezzi sono cambiati radicalmente. I più potenti calcolatori dell'epoca sarebbero impalliditi di fronte ad un odierno smartphone, e lo studio dei modelli fluidodinamici dell'atmosferica era molto lontano dallo stadio attuale. Eppure, proprio negli anni '60 la comprensione dei fenomeni atmosferici stava facendo un enorme salto di qualità grazie ad un geniale matematico del MIT prestato alla climatologia, Edward Lorenz. Lorenz pubblicava nel 1963 uno dei lavori più influenti nel pensiero scientifico del XX secolo: in quell'articolo, "Deterministic nonperiodic flow", veniva per la prima volta portato alla luce (su un semplice modello tridimensionale di origine fluidodinamica) il fenomeno del caos deterministico, che, oltre a rivelarsi una chiave di lettura di moltissimi modelli fisici, la avrebbe poi fatta da padrone proprio nella fluidodinamica atmosferica.

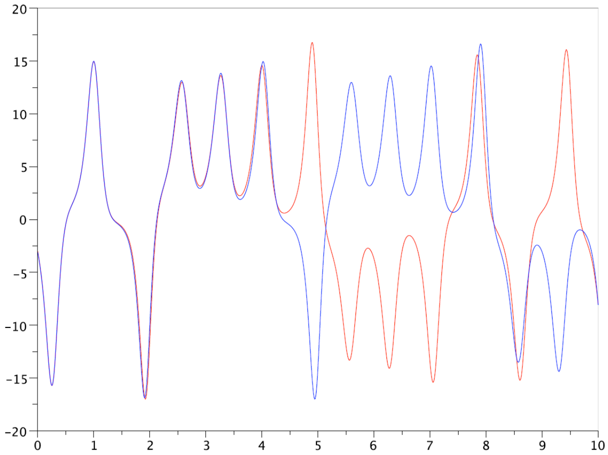

Figura 1: Traiettorie del sistema di Lorenz per due stati iniziali molto vicini.

Molto all'ingrosso, un sistema è detto caotico se il suo comportamento, a partire da due condizioni iniziali molto simili, può diventare totalmente diverso anche in tempi relativamente brevi. Ricordate il film "Sliding doors"? Ecco, nei sistemi caotici una piccola perturbazione può cambiare completamente il corso delle cose. *"Il batter d'ali di una farfalla in Brasile, può provocare un tornado in Texas"* ebbe a dire Lorenz, con un po' di gusto del paradosso (ma nella matematica ciò che sembra un paradosso ha spesso piena cittadinanza). Questo effetto si vede bene nella Figura 1, in cui è rappresentata la prima componente di due traiettorie del sistema di Lorenz in funzione del tempo. Le due variabili, pur partendo da punti molto vicini, diventano presto completamente "indipendenti" l'una dall'altra.

Lorenz voleva capire qual è il margine di prevedibilità del sistema atmosferico: oggi sappiamo che questo margine è intrinsecamente basso. Il Colonnello Bernacca non aveva colpe.

Se la caoticità dell'atmosfera è un limite contro cui la previsione meteo cerca di combattere, ci sono altri settori della fisica dell'atmosfera per cui non ha neanche senso lottare. Nella climatologia, l'interesse è sul comportamento a lunga scadenza (mesi, anni, decenni) e su tutta l'atmosfera, ben oltre qualunque margine di prognosi. Ha un senso considerare modelli matematici e numerici di un'evoluzione caotica su tempi e scale così grandi? Vorrei convincervi di sì, ma per farlo devo introdurre un diverso punto di vista. Ciò che voglio fare è generare un'evoluzione che "potrebbe essere" quella giusta. In altri termini, un'evoluzione che abbia *proprietà statistiche* simili a quella reale.

A questo proposito andrebbe detto che un modello matematico non riproduce sostanzialmente mai il comportamento di un sistema fisico in modo esatto. Nel costruire un modello, mi si passi la banalità dell'osservazione, si decide di descrivere certe relazioni causa-effetto e di tralasciarne altre, e la bravura del matematico applicato sta (anche) nel selezionare i meccanismi davvero rilevanti nel sistema fisico che si studia.

Quali sono i meccanismi rilevanti nello studio del clima? Innanzitutto, quelli che garantiscono un buon comportamento su tempi lunghi, ad esempio un corretto bilancio energetico, che fa sì che le soluzioni del modello non si attenuino né si espandano per effetto di derive dell'energia (in realtà ci sono anche altre quantità *invarianti* da tenere d'occhio, ma concentriamoci sull'energia). Per il lettore più smaliziato, questo porta verso modelli analitici in cui almeno la struttura base sia di tipo hamiltoniano.

D'altra parte, quando si riproduce un sistema hamiltoniano su un computer, cioè in una forma approssimata, non è affatto detto che l'energia si conservi. Cioè, l'approssimazione può cambiare, sia pure leggermente, le caratteristiche del modello. Basta un modello semplicissimo come il pendolo (quello ideale, senza attrito) per vedere differenze decisive tra i vari metodi: nella Figura 2 è mostrata la simulazione del pendolo con tre metodi numerici classici: i metodi di Eulero esplicito (rosso), di Eulero implicito (blu) e di Crank-Nicolson (verde). Come si vede, mentre per tempi piccoli tutti e tre danno una buona approssimazione, per tempi lunghi solo il terzo mantiene l'ampiezza dell'oscillazione (cioè l'energia totale). E su tempi ancora più lunghi la differenza diviene drammatica.

Chiaramente, molti metodi numerici permettono di conservare abbastanza bene l'energia se la discretizzazione delle equazioni è sufficientemente accurata e

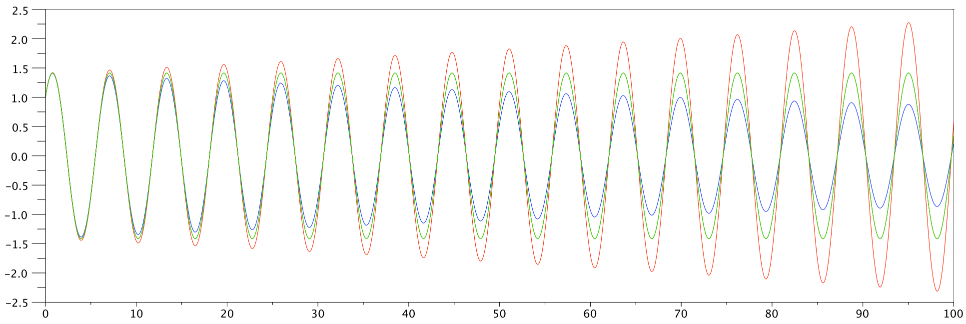

Figura 2: Diverse approssimazioni per il pendolo ideale.

l'intervallo di tempo è breve, ma costruendo un metodo che conservi *strettamente* l'energia (più precisamente: che conservi la *struttura simplettica* del modello), saremo in grado di riprodurre alcuni comportamenti fisici sul lungo termine anche con discretizzazioni relativamente poco raffinate.

Ad esempio, la Figura 3 mostra l'evoluzione di una soluzione test molto usata nei modelli globali di fluidodinamica atmosferica: la cosiddetta *onda di Rossby–Haurwitz*. Nella figura, stiamo proiettando la sfera su un rettangolo, quindi in ascissa ci sono le longitudini ed in ordinata le latitudini. L'evoluzione dell'onda di Rossby–Haurwitz consiste in una traslazione rigida da ovest verso est, con il rosso ad indicare regioni a circolazione ciclonica (antioraria) e il blu regioni a circolazione anticiclonica (oraria). Va da sé che in natura questa soluzione non si vede mai: ma è un test significativo per gli schemi di approssimazione numerica, anche perché permette di valutare la degradazione della soluzione al progredire del tempo. Lo schema che abbiamo costruito, conservando l'energia, simula l'onda ottimamente anche per tempi lunghi, anche con una discretizzazione molto poco accurata.

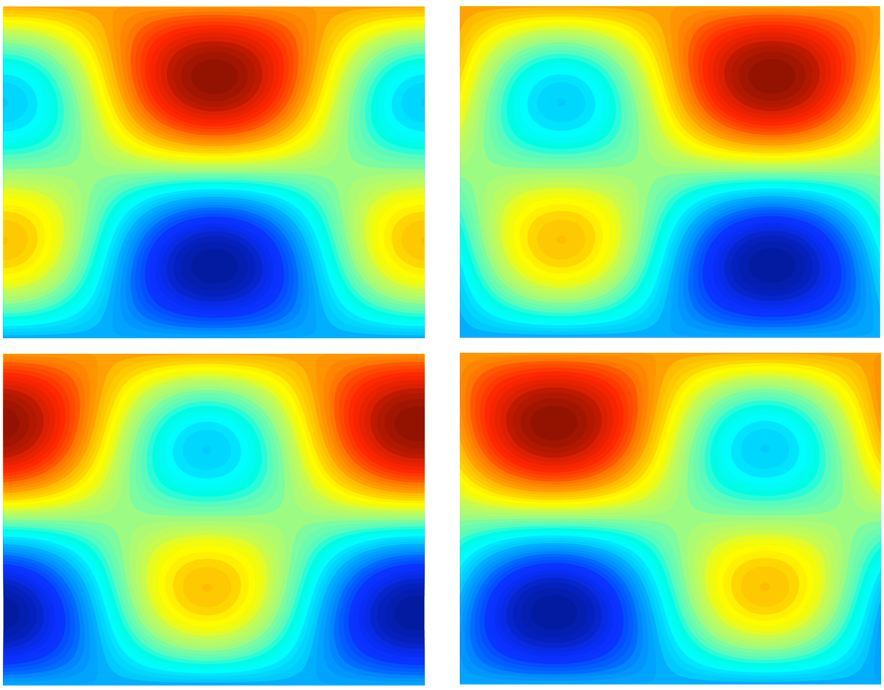

Figura 3: Movimento dell'onda di Rossby–Haurwitz.

Naturalmente, ci si potrebbe chiedere se basti conservare l'energia per ottenere un buon comportamento del modello numerico per tempi lunghi. La risposta è no – molte altre caratteristiche fisiche dovrebbero essere preservate – e con un po' di tempo e di pazienza si può verificare che alcune di queste proprietà sono effettivamente rispettate nella nostra approssimazione e che non vengono degradate al crescere del tempo di simulazione. Questo non vuol dire aver risolto il problema della simulazione su lungo termine dei sistemi climatici, ma rappresenta il nostro piccolo contributo in questa direzione: un'approssimazione di un modello di dinamica dell'atmosfera che conservi l'energia su una geometria sferica. Come sempre nella ricerca, si tratta di una briciola del sapere, di una goccia del mare. Anzi, nella fattispecie, di un soffio nell'atmosfera. Ma Lorenz insegna che ogni piccolo soffio può avere conseguenze inaspettate.

PER APPROFONDIRE:

F. Bonghi, R. Ferretti.
Construction and validation of a fully symplectic code for a climatic model.
In preparazione.

E. N. Lorenz.
Deterministic nonperiodic flow.
Journal of the Atmospheric Sciences, 20 (1963), 130–141.
leggi articolo

V. Zeitlin.
Self-Consistent Finite-Mode Approximations for the Hydrodynamics of an Incompressible Fluid on Nonrotating and Rotating Spheres.
Physical Review Letters, 93 (2004), 264501.
leggi articolo

SULL'AUTORE:

Roberto Ferretti è professore associato presso l'Università Roma Tre. I suoi interessi di ricerca riguardano i metodi numerici per equazioni di Hamilton-Jacobi di primo e secondo ordine, equazioni iperboliche e paraboliche degeneri.
E-mail: `ferretti@mat.uniroma3.it`