Madd-Spot
La serie speciale di articoli divulgativi di Maddmaths!

Web site
http://maddmaths.simai.eu/

PARABOLICO O IPERBOLICO? I MODELLI DIFFUSIVI FANNO LITIGARE GLI SCIENZIATI

DI CORRADO MASCIA

Anche la scienza ha le sue discussioni ed i suoi litigi, che, auspicabilmente, sono una buona occasione per chiarire pregi e difetti di un punto di vista o di un altro. Tre pagine per dire in breve della *querelle* tra modelli parabolici e modelli iperbolici per la descrizione di fenomeni dissipativi.

Il prototipo tipico di meccanismo dissipativo è la conduzione del calore: mettendo a contatto un corpo caldo ed uno freddo, il calore passa dal primo al secondo. Esistono altre situazioni, di tipo fisicamente diverso, ma con caratteristiche simili: nel caso di rottura improvvisa di una diga, l'acqua comincia ad inondare la zona asciutta, propagandosi da monte a valle; all'apertura del rubinetto della bombola, il gas contenuto tende ad invadere la regione esterna, e così via dicendo. Fenomeni detti, genericamente, **diffusivi**. La sfida è quella di proporre una descrizione che sia in grado di quantificare questo passaggio di materia (reale o ideale) fornendo previsioni affidabili. Il numero di ambiti a cui la problematica si applica indica il fatto che la sfida è ancora aperta e il dibattito animato.

Una strada predittiva possibile si basa sull'uso di modelli differenziali. Le variabili incognite sono le quantità che descrivono il fenomeno (temperatura, livello dell'acqua, concentrazione delle molecole di gas, etc.); le equazioni descrivono le regole a cui queste devono sottostare. In generale, si tratta di modelli macroscopici o statistici, nel senso che non descrivono l'evoluzione delle singole particelle (molecole, individui, etc.), ma della totalità della popolazione.

Per la diffusione, il prototipo più semplice è l'**equazione del calore**. Seguendo Jean Baptiste Fourier, si assume che il calore proceda nella direzione di massima variazione di temperatura e con velocità proporzionale a tale variazione: quindi rapida, se il contrasto è forte, lenta se debole. Per vie matematiche, di cui ometto i dettagli, ne viene fuori una relazione che, in qualche senso, corrisponde all'equazione polinomiale $y = x^2$. Pertanto, l'equazione del calore viene classificata come **equazione parabolica**. Ci sono proposte alternative, tra cui la più famosa è l'**equazione del telegrafo**. La logica non è troppo diversa dalla precedente, l'unica differenza sta nell'assumere la presenza di un ritardo, misurato da un parametro τ, detto **tempo di rilassamento**, dovuto al fatto che la risposta del sistema alla presenza di una variazione di temperatura non è istantanea, ma necessita di un certo intervallo di attesa. Nella logica dell'associazione con equazioni polinomiali, al telegrafo corrisponde l'equazione $\tau y^2 + y = x^2$ e, di conseguenza, si parla di **equazione iperbolica**.

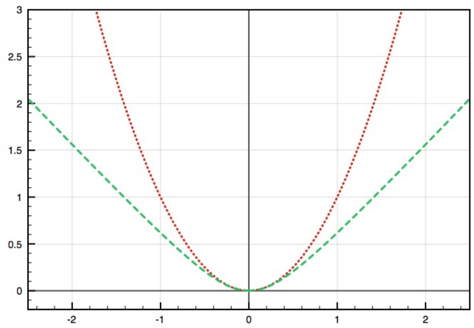

Figura 1: Il grafico della parabola $y = x^2$ (puntini rossi) e quello dell'iperbole $\tau y^2 + y = x^2$ con $\tau = 1$ (tratteggiato verde).

Guardando le curve $y = x^2$ e $\tau y^2 + y = x^2$ si osservano analogie e differenze. Oltre all'evidente simmetria rispetto all'asse verticale, il comportamento delle due curve in prossimità del punto $(0, 0)$ è molto simile. Tanto più simile quanto più ci si avvicina a tale punto e quanto più piccolo è il valore di τ. Al contrario, per valori grandi di x, l'andamento è ben diverso: nel caso parabolico la crescita è quadratica, in quello iperbolico è lineare, perché in tale regime vale la relazione approssimata $y \sim \pm x/\tau$.

Quando si confrontano i modelli differenziali corrispondenti, cioè l'equazione del calore e quella del telegrafo, emergono similitudini e differenze analoghe. E il dibattito si apre in difesa dell'uno o dell'altro punto di vista. Il modello parabolico ha una semplicità maggiore dovuta alla presenza di una forma di **autosimilarità**. Con accortezza, è possibile trasformare soluzioni piccole in grandi (e viceversa) attraverso un riscalamento delle variabili. La conseguenza non da poco sta in una maggiore maneggevolezza dell'equazione e nella possibilità di determinare formule esplicite per le sue soluzioni. Allo stesso tempo, quella sua eccessiva crescita all'infinito comporta l'eventualità che la quantità diffusa possa propagarsi con velocità infinita. Da lì un certo numero di critiche motivate robustamente dalla richiesta relativistica che niente possa viaggiare più velocemente della luce.

In correzione del difetto parabolico, tutta una scuola di scienziati, a partire da Carlo Cattaneo, ha proposto di utilizzare equazioni iperboliche per descrivere fenomeni di diffusione, e quindi, ad esempio, sostituire l'equazione del telegrafo a quella del calore. I vantaggi sono molteplici, a partire dall'eliminazione del paradosso della velocità di propagazione infinita, ma, allo stesso tempo, il prezzo non è basso. La struttura più complicata dell'equazione ne riduce la praticità, complicando formule e strategie di analisi. In più, dato che le equazioni descrivono meccanismi di tipo dissipativo, sono da considerare affidabili solo in regioni che corrispondono al punto $(0, 0)$ e, dunque, corrono il rischio di essere indistinguibili nella pratica.

In effetti, per molte equazioni iperboliche dissipative, motivate da ambiti fisicamente diversi tra loro (fluidodinamica, elasticità, relatività, materia condensata, etc.) il comportamento su tempi lunghi è equivalente a quello di una corrispondente equazione parabolica. L'impegno dei ricercatori teorici, tra cui noi matematici, sta nel quantificare in maniera precisa e dimostrare in maniera rigorosa il legame iperbolico–parabolico, in modo da definirne precisamente i confini, le distanze

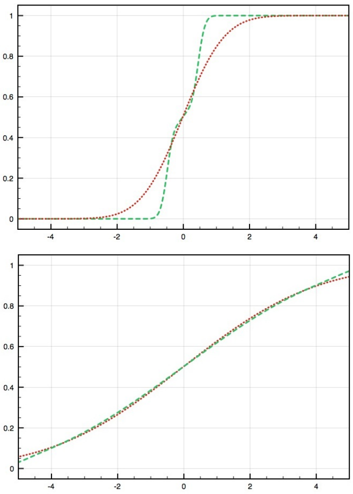

Figura 2: Un corpo freddo ed un corpo caldo a contatto secondo il modello parabolico (puntini rossi) e secondo quello iperbolico (tratti verdi).
In alto, la distribuzione di temperatura
dopo un intervallo di tempo breve. In basso, dopo un intervallo di tempo lungo.

e le sovrapposizioni. Un esempio tra i tanti è quello discusso in [Mascia], dove si cerca di individuare la forma precisa dell'equazione parabolica che descrive in maniera ottimale il comportamento per tempi grandi di un meccanismo prettamente iperbolico, basato sull'idea di una popolazione di individui a cui è concesso di spostarsi utilizzando solo un insieme finito di velocità.

Se la dissipazione prevista dai modelli iperbolici (tipicamente più strutturati) è ben descritta anche da modelli di tipo parabolico, perché complicarsi la vita? Sta qui il centro del dibattito tra i sostenitori di una tesi e dell'altra. Chi vuole indagare, può mettere il naso in [Geroch] dove si difende, senza mezze misure, il principio secondo cui le usuali equazioni di Navier–Stokes per i fluidi (che hanno una natura prettamente parabolica) non possono e non devono essere sostituite da nessuna formulazione di tipo iperbolico. A difesa delle teorie iperboliche, invece, consiglio la lettura di [Herrera, Pavón], dove sono proposti una serie di contesti in cui il passaggio da parabola ad iperbole, dando retta agli autori, è d'obbligo.

Un ruolo fondamentale è giocato dal valore del tempo di rilassamento τ, il quale dipende da materiali e fenomeni considerati. Nei regimi quotidiani, rischia di essere talmente piccolo da rendere indifferenziati i due punti di vista (a sostegno, quindi, della scelta parabolica, in quanto più semplice). In situazioni più estreme, le cose possono cambiare, come capita negli ambiti in cui gli effetti relativistici diventano significativi (quindi in cosmologia) o quando si manifestano effetti di origine quantistica (come accade, ad esempio, con l'elio liquido a temperature estremamente basse). Una risposta universale, quindi, non c'è: ad ogni problema, la sua soluzione.

PER APPROFONDIRE:

R. Geroch.
On hyperbolic "theories" of relativistic dissipative fluids.
leggi preprint

L. Herrera, D. Pavón.
Hyperbolic theories of dissipation: Why and when do we need them?
Physica A, 307 (2002), 121–130.
leggi preprint

C. Mascia.
Velocity-jump processes with a finite number of speeds and their asymptotically parabolic nature.
leggi preprint

SULL'AUTORE:

Corrado Mascia è professore associato presso la Sapienza – Università di Roma. I suoi interessi di ricerca riguardano le equazioni alle derivate parziali di tipo evolutivo.
E-mail: `mascia@mat.uniroma1.it`