MADD-SPOT, **3**, 2013

Madd-Spot
La serie speciale di articoli divulgativi di Maddmaths!

Web site
http://maddmaths.simai.eu/

TRAFFICO VEICOLARE E GIOCHI DIFFERENZIALI

DI FABIO S. PRIULI

La nostra esperienza quotidiana sulle strade alla guida di automobili e ciclomotori ci insegna che il comportamento e la dinamica del traffico stradale è di difficile regolazione e previsione. Ciononostante, sin dalla metà del secolo scorso, con il crescente sviluppo delle reti stradali e con l'aumento inarrestabile del numero di veicoli, molti matematici e ingegneri hanno dedicato tempo e fatica alla ricerca di modelli che potessero descrivere accuratamente i flussi di traffico per prevedere e, se possibile, controllare al meglio le condizioni di traffico sia in città che in autostrada.

Un modello che si è rivelato molto efficace, almeno nel caso di lunghe strade con un unico senso di marcia (come per esempio le autostrade), è stato quello basato sulla fluidodinamica. In questa situazione, infatti, il moto delle vetture diventa sostanzialmente unidirezionale e le scelte di ciascun guidatore sono influenzate principalmente da quelle dei guidatori più prossimi. Questo permette di trattare il flusso veicolare come se fosse un fluido e quindi di applicare la matematica delle leggi di conservazione - sviluppate originariamente per descrivere sostanze liquide e gassose - per studiare questo fenomeno. I modelli di questo tipo, introdotti indipendentemente da Lighthill e Whitham nel 1955 e da Richards nel 1956, si sono rivelati uno strumento molto efficace di descrizione e previsione della dinamica del traffico veicolare.

Il passo successivo della ricerca matematica è stato lo studio di metodi e strategie per evitare il crearsi di situazioni di traffico eccessivamente congestionato. Si tratta di un trend di ricerca molto recente che coniuga la teoria delle equazioni alle derivate parziali (come le leggi di conservazione) con la teoria del controllo e la teoria dei giochi. In particolare, significativi sono alcuni recenti risultati in cui si cercano equilibri di Nash in problemi di traffico stradale, ossia in cui si cerca di spingere i guidatori a seguire un comportamento “ottimale”, rispetto ad un certo criterio prefissato, che sia anche stabile (nel senso che nessun singolo guidatore possa migliorare il proprio risultato cambiando autonomamente il proprio comportamento). Cerchiamo di spiegare meglio tale approccio.

Il problema modello che vogliamo studiare è il seguente: un gruppo di guidatori parte la mattina dal luogo A, diciamo una zona residenziale, e deve arrivare alla propria destinazione B, che potrebbe essere una zona di uffici e negozi, entro un orario prestabilito (ma non tassativo) T. Il criterio per valutare la performance di ciascun guidatore avrà una parte che penalizza la partenza troppo anticipata, che costringe il guidatore ad alzarsi troppo presto, ed una parte che penalizza l'arrivo in ritardo alla destinazione B.

Per fissare le idee, potremmo pensare ad un "costo" come quello che segue. Indicando con τ_p il tempo di partenza dalla zona residenziale e con τ_a il tempo di arrivo alla zona di lavoro, possiamo immaginare che il costo di un guidatore sarà una funzione del tipo

$$\text{costo } = \begin{cases} -\tau_p & \text{se } \tau_a \leq T \\ -\tau_p + (\tau_a - T)^2 & \text{se } \tau_a > T \end{cases}$$

Ossia, se il guidatore arriva in tempo a destinazione ($\tau_a \leq T$), allora il costo sarà solamente la fatica di essersi messo in strada al tempo τ_p; mentre se arriva a destinazione oltre il tempo massimo T, dovrà anche pagare un prezzo per non essere arrivato in tempo a destinazione. Assumendo che L sia la lunghezza dell'autostrada che congiunge A a B e che V sia la velocità (costante) delle vetture, possiamo immaginare che il tempo di arrivo sia semplicemente $\tau_a = \tau_p + \frac{L}{V}$ e quindi che l'espressione per il costo rispetto al tempo di partenza τ_p diventi quella mostrata in Figura 1. Questo permette di calcolare abbastanza facilmente il migliore tempo di partenza

$$\tau_p^{ottimo} = T - \frac{L}{V} + \frac{1}{2}.$$

Il risultato è che conviene attendere il più possibile prima di partire e che vale la pena arrivare con un leggero ritardo pur di non partire troppo in anticipo. Tuttavia la soluzione non è soddisfacente: è chiaro che se tutti i guidatori partissero insieme nel momento migliore, la strada sarebbe ben presto congestionata e la strategia non sarebbe più ottimale per nessuno.

Il problema nel ragionamento appena seguito, e il motivo che ci ha indotto a trovare una soluzione poco realistica, è che abbiamo ipotizzato che tutte le vetture possano procedere ad una velocità V costante e indipendente dall'occupazione della strada. Questa assunzione, da noi utilizzata per avere una relazione tra il tempo di

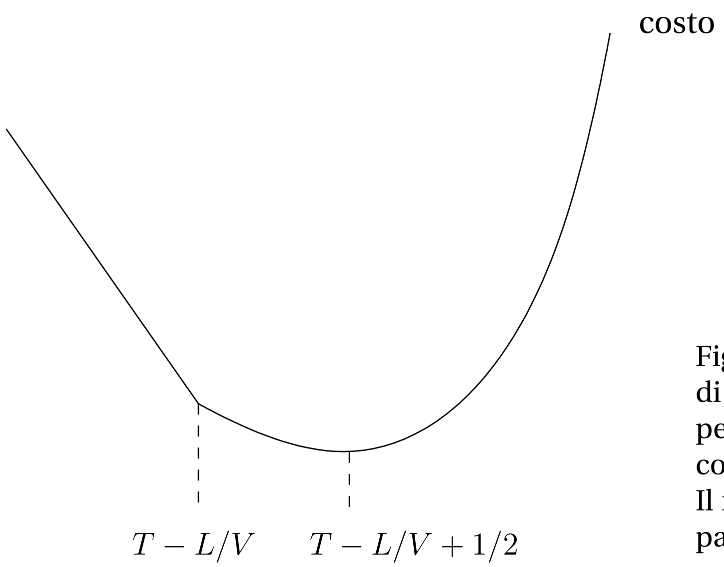

Figura 1: Il costo in funzione del tempo di partenza τ_p. Esso ha una parte lineare per $\tau_p \leq T - \frac{L}{V}$ e una parte che coincide con un ramo di parabola per $\tau_p \geq T - \frac{L}{V}$. Il minimo coincide con il minimo della parabola.

partenza e quello di arrivo, non è giustificabile nel contesto di un problema come il nostro in cui un grande numero di autovetture e guidatori sono coinvolti. Per ovviare a questo problema e fornire un modello più realistico, si assume che la velocità sia compresa tra 0 ed una certa velocità massima $V_{\max}$, e solitamente si descrive la velocità come una funzione della densità di vetture lungo la strada. L'evoluzione della densità è poi descritta dal già citato modello di Lighthill & Whitham e Richards (LWR).

Nel modello LWR, però, non ha molto senso parlare dei tempi di partenza dei singoli guidatori, visto che esso descrive l'evoluzione della densità (media) di vetture in ciascun punto della strada tra l'origine A e la destinazione B. È quindi opportuno ripensare il nostro problema in termini di ottimizzazione del tempo di percorrenza per l'intera "popolazione" di guidatori, e non più per i singoli individui. In questo modo, il problema consiste nel pianificare un opportuno piano di partenze da A, scegliendo quante vetture debbano partire da casa a ciascun tempo τ_p, in modo che venga ottimizzato il costo combinato dell'intera popolazione di guidatori. Questo costo può assumere una forma analoga al precedente, ma conterrà degli opportuni integrali del flusso entrante nella strada, per permettere di stimare il tempo necessario per portare *tutti* i guidatori a destinazione.

In modo abbastanza sorprendente, il problema risulta ancora avere un'unica soluzione, ossia un modo univoco di regolare l'entrata di vetture all'estremo A della strada, attraverso la scelta del flusso (numero di vetture al minuto) in A ad ogni tempo t, in modo che l'intera popolazione di guidatori arrivi a B fornendo un minimo al nuovo costo. La soluzione ottimale è mostrata in Figura 2, e consiste nel far partire al tempo $\tau_o < T - L/V_{\max}$ un primo blocco di guidatori che, trovando la strada sostanzialmente libera, potranno viaggiare alla velocità massima $V_{\max}$ e arriveranno a B al tempo $\tau_o + L/V_{\max} < T$. Poi, la scelta di quante macchine far partire nei tempi tra τ_o e T va calibrata per ottenere che la maggior parte dei guidatori arrivino a B entro il tempo T, anche se nel momento in cui partiranno la strada sarà già trafficata e quindi potranno solo viaggiare con una velocità minore di $V_{\max}$. Infine, un piccolo numero di guidatori verrà costretto a partire quando il tempo è T o leggermente dopo, fino ad un certo tempo τ_1, in modo che, pur pagando loro un prezzo leggermente superiore, contribuiscano a far arrivare la maggioranza della popolazione a B in orario.

La soluzione presentata, tuttavia, non fornisce un equilibrio di Nash per il gioco, ossia non fornisce una strategia che i guidatori percepiscano come ottimale nel senso che nessuno di loro possa migliorare la propria performance tramite un cambio unilaterale di strategia. Infatti, in questo caso i singoli guidatori non hanno tutti lo stesso costo personale e quelli che vengono forzati a partire molto presto (al tempo

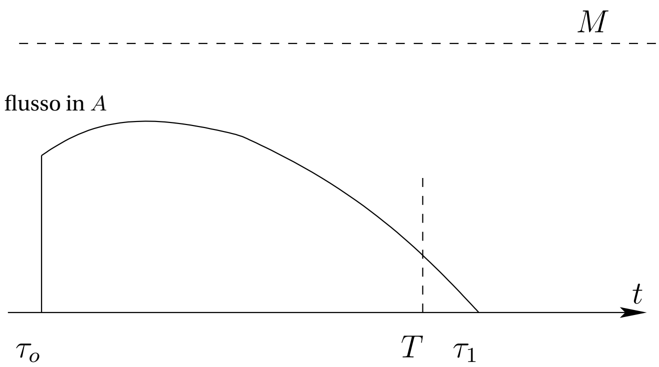

Figura 2: Il flusso di ingresso ottimale all'estremo A in funzione del tempo e la quota massima di ingressi M che renderebbe la strada congestionata.

τ_o) arrivando a destinazione con grande anticipo o quelli che devono partire in ritardo (tra il tempo T ed il tempo τ_1) tenderebbero, se potessero, a cambiare il loro tempo di partenza per migliorare il proprio risultato. In assenza di un'autorità centrale in grado di imporre ai guidatori l'esatto tempo di partenza, quindi, si avrebbero sicuramente guidatori che rifiuterebbero di partire quando è richiesto loro e sceglierebbero un orario più consono alle loro esigenze, opponendosi alla realizzazione del piano globalmente ottimale.

Per compensare tale eventualità ed ottenere degli equilibri di Nash, sono stati suggeriti due possibili approcci. Un primo modo consiste nel modificare il gioco aggiungendo nel costo per i giocatori un pedaggio all'ingresso A, variabile nel tempo, che renda più appetibile la partenza anticipata o ritardata attraverso tariffe d'ingresso scontate. In tale modo la partenza in orari scomodi non è più percepita come sfavorevole dai guidatori a cui viene imposta, e l'ottimo globale potrebbe in effetti venire realizzato.

Un secondo modo per raggiungere un equilibrio di Nash consiste nel lasciare liberi i guidatori nella scelta del proprio orario di partenza, aggiungendo però un tetto massimo M al flusso di macchine che possono entrare nella strada dall'ingresso A. Se ad un certo tempo il flusso superasse M, allora il flusso in eccesso creerebbe una coda di vetture all'ingresso la cui evoluzione, o meglio la cui lunghezza, può essere descritta da una nuova equazione differenziale ordinaria. Come nel caso dell'aggiunta di un pedaggio, anche in questo caso, l'equilibrio di Nash può essere raggiunto grazie alla penalizzazione dei comportamenti che deviano dalla strategia ottimale: se troppi guidatori cercano di partire negli orari più "comodi", una parte di loro finisce per accodarsi all'ingresso della strada, risultando penalizzati rispetto a coloro che avevano scelto una strategia più accorta. Dal punto di vista matematico, anche questo nuovo problema, con l'equazione aggiuntiva per la coda all'ingresso A, ha un'unica soluzione costituita, ad ogni tempo, da un flusso d'entrata e da una coda all'ingresso, e si verifica che tale soluzione fornisce un equilibrio di Nash al gioco. Tuttavia, come spesso accade in teoria dei giochi, tale equilibrio di Nash in generale fornisce un costo complessivo ben superiore a quello ottimale trovato in precedenza.

Ritroviamo quindi un fenomeno che chi viaggia spesso in autostrada conosce bene: senza un'autorità centrale a regolare i flussi autostradali, le cosiddette "partenze intelligenti" restano un miraggio lontano e l'equilibrio attorno al quale i guidatori si distribuiscono da sé, partendo all'orario a loro più comodo, fornisce una performance ben lontana da quella ottimale che sarebbe possibile con una più rigida organizzazione.

PER APPROFONDIRE:

A. Bressan, F. S. Priuli.
Infinite horizon noncooperative differential games.
Journal of Differential Equations, 227 (2006), 230–257.
leggi articolo leggi preprint

A. Bressan, K. Han.
Optima and equilibria for a model of traffic flow.
SIAM Journal on Mathematical Analysis, 43 (2011), 2384–2417.
leggi articolo leggi preprint

M. J. Lighthill, G. B. Whitham.
On kinetic waves. II. Theory of traffic flows on long crowded roads.
Proceedindgs of the Royal Society A, 229 (1955), 317–345.
leggi articolo

P. I. Richards.
Shock waves on the highway.
Operation Research, 4 (1956), 42–51.
leggi articolo

SULL'AUTORE:

Fabio S. Priuli ha conseguito la laurea in Matematica presso l'Università Cattolica di Brescia ed il dottorato in Matematica presso la SISSA, Trieste. Attualmente ha un assegno post-doc presso l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del CNR. I suoi interessi di ricerca comprendono la teoria del controllo per le equazioni a derivate parziali ed i giochi differenziali.
E-mail: `priuli@mat.uniroma2.it`