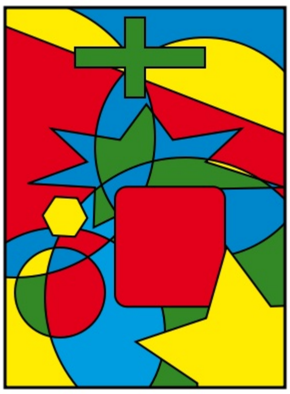
Il Teorema dei Quattro Colori

Simone Costa

1 Introduzione al Teorema

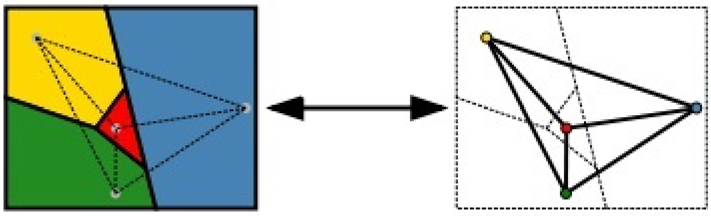
L'enunciato del teorema dei quattro colori si può esprimere, senza pretesa di formalismo come segue: ogni carta geografica si può colorare con quattro colori in maniera tale che due regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore. Va precisato che consideriamo solo regioni connesse (quindi non come la Russia o la provincia di Milano) e chiamiamo adiacenti due regioni che abbiano un bordo in comune e non solo uno o più punti isolati.



Utilizzando la teoria dei grafi si può enunciare il problema (teorema) dei quattro colori più elegantemente. In questo contesto per grafo $G = (V, E)$ intendiamo un insieme finito di vertici V e di coppie di vertici chiamate archi E. Dato $v \in V$, indicheremo poi con $d(v)$, il grado del vertice v ovvero il numero di archi a cui v appartiene. Nel seguito del nostro articolo considereremo i grafi disegnati nel piano, ovvero tali che gli archi siano delle curve che non si intersecano tra loro, tali grafi sono chiamati grafi piani. Partendo da una carta geografica M costruiamo un grafo come segue:

- come vertici V prendiamo l'insieme delle regioni di M;

- come archi E prendiamo le coppie di regioni di M adiacenti in M.



Disegnando, come in figura, il grafo così ottenuto si ottiene un grafo piano che ha i vertici contenuti nella regione corrispondente di M e gli archi che intersecano il confine tra regioni adiacenti esattamente una volta. Il teorema dei quattro colori si enuncia quindi nel nuovo contesto come segue:

Teorema 1. *Sia $G = (V, E)$ un grafo piano. Allora esiste una colorazione dei vertici di G con 4 colori tale che due vertici connessi da un arco di E siano colorati con colori diversi.*

Questo grattacapo è stato proposto esplicitamente per la prima volta nel 1852 (cfr. A.Pasotti [1]) dal britannico Francis Guthrie, allora studente, il quale colorando la cartina delle contee inglesi si rese conto che erano sufficienti 4 colori. Nonostante a prima vista si possa ingenuamente credere d'essere di fronte ad un problema piuttosto semplice, per più di cento anni i matematici hanno proposto solamente dimostrazioni sbagliate, tra le quali va menzionato il tentativo di Kempe del 1879, dimostrazione creduta vera per più di dieci anni e che gode comunque di un certo interesse scientifico. Kempe ha avuto il merito di introdurre l'idea delle catene di Kempe, sottografi connessi colorati con due colori e delle inversioni di Kempe, ovvero scambi di colore di una catena di Kempe (per vedere all'opera tale metodo cfr. prop. 1). Per avere una dimostrazione completa di tale teorema si dovrà aspettare il 1977 quando Appel e Haken pubblicarono in due articoli il lavoro "Every Planar Map Is Four Colourable" ([2], [3]).

2 La Dimostrazione: Linee Guida

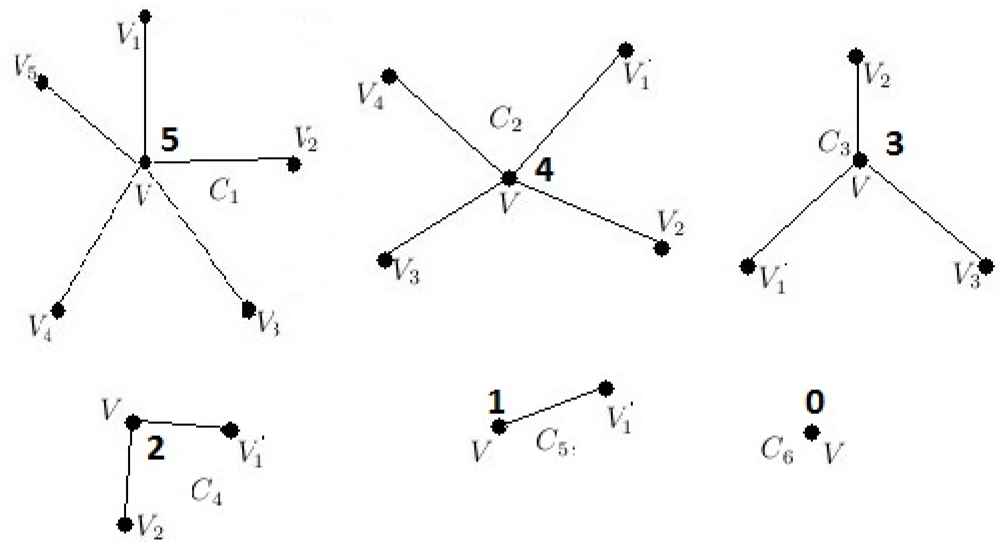
Prendiamo ora in esame la dimostrazione di Appel e Haken ([2], [3]) cercando di esporne le linee guida.
L'idea di fondo è mostrare che ogni grafo piano opportuno (nel caso dei quattro colori ci ridurremo alle triangolazioni, cfr. sezione 2.2) possiede un

sottografo (una configurazione) appartenente ad una lista finita e che nessuna configurazione di tale lista può essere un sottografo di un controesempio (minimale) del teorema. Per prendere maggior familiarità con il metodo descritto lo applichiamo prima al "Toy Problem" della colorazione con cinque colori. Prendiamo liberamente spunto da Diestel (cfr.[7] pag. 96-97) mettendo poi in evidenza la similitudine con il percorso della dimostrazione del teorema dei quattro colori.

2.1 "Toy Problem": il Teorema dei Cinque Colori

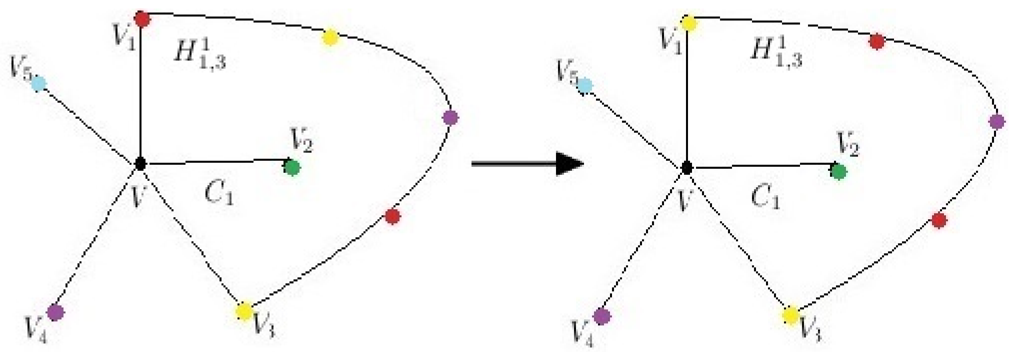
Teorema 2. *Sia G un grafo piano. Allora esiste una colorazione dei vertici di G con 5 colori tale che due vertici connessi da archi di E siano colorati con colori diversi.*

In questo contesto penseremo ad una *configurazione* come ad un sottografo di un grafo piano di cui abbiamo specificato il grado dei vertici nel grafo piano, come da figura. In primo luogo presentiamo una lista di configurazioni che non possono appartenere ad un controesempio minimale. Chiameremo tali configurazioni *riducibili*. Sia $\mathfrak{U} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$ l'insieme delle configurazioni della figura.



Proposizione 1. *Sia G un grafo piano che sia un controesempio (minimale) al teorema dei cinque colori. Allora G non può contenere nessuna delle configurazioni dell'insieme $\mathfrak{U}$.*

Proof. Poiché in C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 il vertice v ha grado minore di 5 è immediato convincersi che un controesempio minimale non può contenere nessuna di queste configurazioni. Supponiamo per assurdo che G sia un controesempio minimale contenente C_1 come sottografo. Il grafo $H = G - \{V\}$ è quindi 5-colorabile. Sia $\nu : H \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ una sua 5-colorazione. Supponiamo, senza perdita di generalità, che i vertici vicini a v usino 5 colori e quindi $\nu(V_i) = i$, altrimenti possiamo estendere la colorazione a V.
Consideriamo il sottografo $H_{1,3}$ (chiamato anche $(1, 3)$-catena di Kempe) costituito dai vertici di colore $1, 3$. Se V_1, V_3 non sono connessi in $H_{1,3}$ allora, chiamata $H^1_{1,3}$ la componente di V_1 possiamo cambiare i colori in $H^1_{1,3}$ ottenendo che i vertici vicini a V usano solo 4 colori. In particolare possiamo estendere la colorazione a V.



Questo metodo è chiamato inversione di Kempe.
Se V_1, V_3 sono connessi in $H_{1,3}$ allora si può dimostrare (è un fatto intuitivo, per una dimostrazione formale cfr. Diestel [7] pag. 97) che il cammino P che li connette separa V_2 da V_4. Chiamato $H_{2,4}$ il sottografo costituito dai vertici di colore $2, 4$ allora V_2 e V_4 non sono connessi in $H_{2,4}$ e possiamo, analogamente a prima, determinare una colorazione tale che i vertici vicini a V usino solo 4 colori. □

Dato un grafo piano G mostriamo ora che esiste un vertice opportuno v che costituisce, con i vertici vicini ad esso una configurazione appartenente ad $\mathfrak{U}$.

Proposizione 2. *Sia $G = (V, E)$ un controesempio minimale del teorema dei 5 colori, allora esiste un vertice v con $d(v) \leq 5$.*

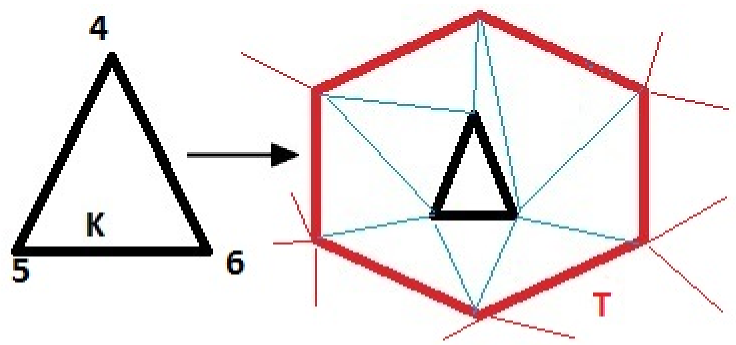
Proof. È facile verificare che una triangolazione ha $3n - 6$ archi (per esercizio oppure cfr. Diestel [7] pag. 75). Di conseguenza il grado medio di un vertice

è:
$$d(G) := \frac{2|E|}{|V|} \leq 2\frac{3n-6}{n} < 6.$$
Esiste quindi un vertice v con $d(v) \leq 5$. $\square$

Da tale proposizione segue immediatamente che almeno una delle configurazioni di $\mathfrak{U}$ appartiene ad ogni grafo piano. Essendo ciascuna di quelle configurazioni riducibile abbiamo dimostrato il teorema dei 5 colori.
Nella dimostrazione dell'ultima proposizione avremmo potuto introdurre una carica su ogni vertice $\theta(v) := 6 - d(v)$, come faremo poi nel teorema dei quattro colori. La proposizione precedente è equivalente a dire che esiste un vertice di carica positiva che sarà il vertice che scegliamo per trovare una configurazione appartenente ad $\mathfrak{U}$.

2.2 Il Vero Problema

Torniamo ora al vero teorema dei quattro colori. Poiché, come ben spiegato da Diestel, (cfr. [7] pag. 73) ogni grafo piano si può estendere ad una triangolazione T del piano, dove per triangolazione intendiamo un grafo piano tale che le sue facce (regioni in cui il grafo divide il piano) siano "triangolari" (ovvero abbiano esattamente tre vertici), ci limitiamo ora a cercare una colorazione in quattro colori dei vertici delle triangolazioni T del piano.
In questo contesto penseremo quindi ad una *configurazione* come ad un sottografo di una triangolazione (e non di un semplice grafo piano come nel caso dei 5 colori precedente) del quale abbiamo specificato il grado dei vertici nella triangolazione, come da figura.



Analogamente al caso dei cinque colori, diremo poi che una configurazione è *riducibile* se non può essere immersa in una triangolazione che sia un controesempio minimale (tra le triangolazioni) del teorema dei quattro colori.

Un insieme di configurazioni è chiamato *inevitabile* (in inglese unavoidable) se ogni triangolazione del piano contiene una configurazione dell'insieme.
È immediato convincersi che il teorema dei quattro colori è dimostrato se si espone un insieme inevitabile $C_1, \dots C_n$ di configurazioni tale che ogni configurazione C_i sia anche riducibile (come fatto con il teorema dei cinque colori).
La prima difficoltà è quindi il determinare un opportuno insieme inevitabile. Per fare ciò sia Appel e Haken [3], hanno usato il metodo di *scaricamento* (in inglese, discharging). Hanno interpretato una triangolazione piana T come una rete elettrica con cariche assegnate su ogni vertice v inizialmente uguali a $\theta(v) = 6 - d(v)$. Come dimostrato nel caso dei cinque colori (cfr. prop. 2) otteniamo che la carica totale assegnata è positiva per ogni triangolazione T. Dopodichè si sono ridistribuite le cariche secondo un opportuno algoritmo composto da passi che chiameremo in seguito regole $\mathfrak{R} = \{R_1, \dots R_n\}$ che rispettano il principio di conservazione della carica. Nello stadio finale dato dall'algoritmo esisterà sempre un vertice v caricato positivamente. Poiché le regole dell'algoritmo sono pensate per rendere possibile una descrizione della configurazione dei vertici vicino ai vertici v con carica finale positiva (che possiamo immaginare come i vertici che distano al più due archi da v, cfr. [4]), tali configurazioni costituiranno un insieme inevitabile. Va evidenziato che Appel e Haken [3] hanno svolto a mano tutti i passi ed i conti dell'algoritmo di scaricamento, determinando un insieme inevitabile $\mathfrak{U}$ di configurazioni costituito da ben 1478 grafi. Robertson, Sanders, Seymour e Thomas, nel loro lavoro [4] hanno semplificato l'algoritmo di scaricamento, utilizzando 32 regole invece che 487, e hanno ottenuto un insieme inevitabile di "soli" 633 grafi .
Per dimostrare, infine, che gli elementi della famiglia $\mathfrak{U}$ sono riducibili, Appel e Haken, hanno scritto un programma che effettua i seguenti due controlli.

- Controlla se le colorazioni in quattro colori di $T \setminus \{K\}$ si possono estendere a K, a meno di scambi nelle catene di Kempe (come fatto con il teorema dei 5 colori). Le configurazioni che rientrano in questa categoria sono chiamate D-riducibili.

- Controlla se configurazione K è contenuta in una triangolazione che si può rimpicciolire (nel senso di minore cfr. Diestel) in modo che rimanga ancora un controesempio al teorema. Le configurazioni che rientrano in questa categoria sono chiamate C-riducibili.

Tale algoritmo, eseguito tramite computer, ha verificato quindi che tutte le configurazioni dell'insieme $\mathfrak{U}$ sono o D-riducibili o C-riducibili. È poi facile verificare che non possono quindi comparire in un controesempio minimale del teorema dei 4-colori, concludendo in questo modo la dimostrazione.

3 Considerazioni Riguardo la Dimostrazione

La dimostrazione del teorema dei quattro colori di Appel e Haken ([2], [3]) non è stata accettata pienamente da tutto il mondo matematico (cfr. [6], [4] e [1]). La prima critica rivolta alla dimostrazione è che per determinare l'insieme inevitabile di configurazioni $\mathfrak{U}$, Appel e Haken, hanno svolto a mano l'algoritmo di scaricamento in più di 400 pagine di passaggi non bene esplicitati e che potrebbero contenere delle imprecisioni. Per rimediare a questo problema nei lavori di Robertson, Sanders, Seymour e Thomas [4] e di Gonthier [5] si è computerizzata anche l'applicazione dell'algoritmo di scaricamento: gli autori hanno ritenuto (e noi ci troviamo pienamente d'accordo con loro) che un calcolatore sia più affidabile nella verifica di numerosi casi.
Una seconda critica rivolta alla dimostrazione è invece di carattere filosofico e coinvolge anche i lavori [4] e [5] successivi. Ci si chiede se si possa considerare una vera dimostrazione una verifica che ha coinvolto un computer in una parte fondamentale del lavoro e della quale nessuno ha mai potuto vedere tutti i passagi svolti esplicitamente.

References

[1] A. Pasotti: *Il teorema dei quattro colori e la teoria dei grafi*. Matematicamente Magazine. **4** (2007), 7-10.

[2] K. Appel, W. Haken: *Every Planar Map Is Four Colourable Part I: Discharging*. Illinois J. Math. **21** (1977), 429-490.

[3] K. Appel, W. Haken: *Every Planar Map Is Four Colourable Part II: Reducibility*. Illinois J. Math. **21** (1977), 491-567.

[4] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour, R. Thomas: *The four-colour theorem*. J. Combin. Theory Ser. B. **70** (1997), 2-44.

[5] G. Gonthier: *Formal Proof: The Four-Color Theorem*. Notices of the AMS. Vol. **55**, Num. 11, (2008), 1382-1393.

[6] E. R. Swart : *The Philosophical Implications of the Four-Color Problem*. The American Mathematical Monthly. **87** (1980), 697-707.

[7] R. Diestel: *Graph Theory*. Springer-Verlag GTM, Heidelberg, 1997.

[8] Wikipedia contributors. "Four color theorem." Wikipedia, The Free Encyclopedia. Wikipedia, The Free Encyclopedia, 3 Jun. 2013. Web. 5 Jun. 2013.

[9] Inductiveload: “Four Colour Planar Graph”; 16 Febbraio, 2007 via Wikimedia, Creative Commons Attribution.

[10] Cyhawk: “Four Colour Map Example”; 2 Settembre, 2008 via Wikimedia, Creative Commons Attribution.

Simone Costa
Sezione di Matematica, Dipartimento di Matematica e Fisica
Università degli Studi “RomaTre”
Largo S. Leonardo Murialdo, 1
00146 Roma, Italy
costa@mat.uniroma3.it