Appunti per l'incontro con Erri De Luca al CNR
11 maggio 2010
di Roberto Natalini

"Discreto e continuo, finito e infinito, sono due poli opposti del nostro modo di conoscere il mondo fisico. Spesso capaci di invertire la loro posizione, e a volte di fondersi l'uno nell'altro. Ci piacerebbe che tutto fosse limitato e contabile e sotto il nostro diretto controllo. Eppure la nostra matematica, e quindi in ultima analisi una buona parte della scienza moderna, si basa sull'idea e prima ancora sull'uso dell'infinito. Un infinito controllato, forse un po' addomesticato, ma non per questo diventato finito."

a) Da una parte ci piacerebbe che tutto fosse finito, discreto, contabile (questi termini non sono tecnicamente equivalenti, ma ok...). Che potessimo mettere tutto in un grande computer (che notoriamente puo' solo avere a che fare con un numero finito – grande, ma finito -- di oggetti, insomma è sempre una specie di grande pallottoliere) e calcolare. In fondo la matematica nasce storicamente dal contare: 10 dita, 100 pecore, 1000 guerrieri, 80 miliardi di galassie, 10^23 stelle, 10^80 atomi. Chi ha bisogno di numeri più grossi??

b) Poi però c'è il teorema di Pitagora. E come sapevano i pitagorici e ci racconta anche Platone nel Menone, si scopre che se prendiamo un quadrato con il lato lungo un metro, la lunghezza della diagonale è uguale alla radice di 2. E che non possiamo mai trovare una frazione che esprima questa lunghezza. Insomma i numeri naturali non bastano, e nemmeno le frazioni. E non bastano nemmeno a calcolare il rapporto tra circonferenza e diametro di un cerchio, ossia la famosa quadratura del cerchio. Ok, per Chuck Norris, pi greco=3, ma non per un matematico, e nemmeno per un ingegnere che deve progettare una ruota (o la fusoliera di un aereo). E questi numeri, radice di due, pi greco, e (il numero di Eulero, ossia la base dei logaritmi naturali), servono sempre, anche se sono difficili (erano difficili per Pitagora...) e spesso non sono capiti fino in fondo. Se vogliamo calcolare un angolo o una distanza o fare una moltiplicazione appena più complessa (I logaritmi di Napier nascono nel 1614 proprio per fare rapidamente le moltiplicazioni), per non parlare di fare della fisica seria (equazioni dell'elettromagnetismo, relatività, fisica quantistica), troviamo l'infinito, infinitamente piccolo e infinitamente grande. Insomma dobbiamo passare al limite. Limite nel senso matematico, nel senso di compiere infinite operazioni con una sola operazione. Perché quando vado al limite, ho bisogno dell'infinito, perché passo sempre attraverso un'infinità di punti per raggiungerlo. E posso quindi riuscire per esempio a risolvere il paradosso di Zenone. Cerchi di attraversare la strada, ma per arrivare dall'altra parte devi raggiungere la metà del percorso. E poi i 3/4, e poi i 7/8 e i 15/16. Ossia per traversare un intervallo devi attraversare prima infiniti sottointervalli sempre più corti e per fare un numero infinito di cose ci vuole un tempo infinito. Giusto? Insomma. C'è qualche cosa che non torna, no? Di solito la strada riusciamo a traversarla. Forse la somma di cose sempre più piccole (anche se in numero infinito) alla fine può essere finita. Ma fino alla definizione delle serie numeriche, come limite delle somme parziali e soprattutto alla sistemazione rigorosa della nozione di convergenza e di numeri reali (con Weierstrass e Dedekind dopo la metà del XIX secolo), questo paradosso ha messo in imbarazzo tutta la filosofia. Non vogliamo spiegare come si risolve, solo cercare di far capire i problemi che possono nascere dal non sapere gestire l'infinito[1].

d) Poi però con Cantor scopriamo che di infinito non ce n'è uno solo, anzi vi sono un sacco di tipi di infinito (infiniti tipi di infinito, sic!). Ma prima vediamo il più semplice paradosso sull'infinito, già osservato da Galileo. Dato che possiamo fare il quadrato di ogni numero, i numeri quadrati (1,4,9,16,25...) sono tanti quanti tutti i numeri. Questo risultato sembra paradossale. Il tutto dovrebbe essere sempre maggiore di una sua parte propria. Cantor ci dice che questo non è più vero quando lavoriamo con insiemi infiniti. Anzi, è proprio la sua (e la nostra) definizione di infinito: un insieme è infinito se puo' essere messo in corrispondenza uno a uno con una sua parte propria. I numeri naturali sembrano essere "di più" dei numeri quadrati, ma invece sono "equipotenti". E torniamo ai vari tipi di infinito. Le frazioni sono infinite. se prendo

1 Come dice David Foster Wallace in "Everything&More": "*La confusione centrale della Dicotomia [nel paradosso di Zenone] è ora eliminata: muoversi dal punto A al punto B non richiede un numero infinito di mosse, ma piuttosto una singola mossa di lunghezza [B-A], che può essere approssimata da una serie convergente*", E&M, p. 195.

due frazioni ne posso sempre trovare una in mezzo. Ma con le frazioni non posso fare la radice di due. Insomma se voglio avere un metro senza buchi, in cui possa misurare la diagonale del quadrato o la circonferenza di un cerchio, devo aggiungere questi numeri "irrazionali". E quando li aggiungo ottengo i numeri “reali” e mi accorgo (Cantor si accorse) che formano un infinito di livello superiore. La differenza tra un metro bucherellato e un metro "pieno". I razionali, ossia le frazioni, occupano una parte trascurabile del nostro metro. Se avendo una matita dalla punta affilitassima, mi divertissi a segnare dei punti a caso su una retta, avrei una probabilità nulla di scegliere un numero frazionario.

e) A questo punto, per capire che veramente non possiamo fare a meno dell'infinito (e del limite, e del continuo, e delle derivate etc...) bisogna chiarire che cosa è un modello matematico. Un modello è una forma di rappresentazione che permette di ragionare con alcuni fatti reali, cercando di trovare i meccanismi basilari della loro interazione. E ci serve a prevedere il futuro con una ragionevole approssimazione. Il primo modello matematico sono forse state le nostre dita. Per ogni pecora che entrava in una grotta mi tocco una falange e cosi almeno fino a 15 per mano ci arrivo. Poi comincio a fare dei segnetti per terra o sulle pareti della mia grotta. Insomma rappresento in modo semplice (una falange) qualche cosa di complesso (una pecora). Pero' ogni cosa puo' essere vista in molti modi. Non esiste il modello perfetto. Prendiamo un gas o un liquido. Certo, sono molecole e potremmo pensarle come palline (e ancora, non sempre si comportano come tali...), ma sono proprio tante (in un cm^3 di gas ci sono circa 10^{20} molecole) ed è difficile calcolare cosa fanno. Una soluzione, molto prima che si parlasse di atomi, fu proposta da Eulero nel '700. Considerare un gas o un liquido come una sostanza "continua", con comportamenti macroscopici, con grandezze che possiamo misurare alla nostra scala: pressione, temperatura, densità. E questi sono i fluidi che vediamo veramente: il vento intorno alla vostra auto, l'aria che sostiene le ali di un aereo, le nuvole nel cielo e l'acqua nel mare[2]. Quando si guida la macchina o semplicemente si guarda la nostra pelle racchiudere le cose che vi sono al suo interno, e a cui teniamo moltissimo, stiamo facendo un limite. Se tiro una palla di gomma, non devo seguire tutte le molecole che la compongono, ma solo il loro baricentro (o poco più).

f) In realtà ogni livello di scala della nostra rappresentazione del mondo ha i suoi modelli. Possiamo partire dagli atomi, ma se vogliamo costruire un tavolo o una casa, dobbiamo passare al limite e vedere la materia come un continuo. Non dimenticando dei vari livelli, ma tenendo in memoria i livelli piu' piccoli, oppure utilizzando modelli diversi in regioni diverse. Posso ricordami che la corrente elettrica è fatta di elettroni, ma poi devo passare la limite per misurare la corrente macroscopica che passa nella lampadina. Insomma, il continuo è ovunque, ed è pre- tecnologico: una corda, un tavolo, un sasso, una strada, un muro, il mondo che vediamo, siamo naturalmente portati a pensarli come continui. In un occhio ci sono 6 milioni di coni e 120 milioni di bastoncelli, quello che vediamo sembra continuo, ma è solo un approssimazione (oppure è l'occhio che approssima la continuità del mondo?). Forse l'idea di continuità e di infinito sono solo delle metafore, concetti umani che non corrisponde al mondo esterno. Ma funzionano benissimo, e difficilmente verranno sostituiti.

g) In realtà il primo modello di continuo è dato dalla nostra autocoscienza. La nostra percezione del tempo, il fluire degli avvenimenti. La nostra percezione di noi stessi. Questi tuffi improvvisi che ci fanno precipitare dentro di noi in momenti di infinita intensità. O anche questi istanti dilatati intorno a cui si (ri)costruiscono i nostri ricordi. Una sorta di infinita concentrazione, senza scatti (al limite salti, posso svenire e risvegliarmi) che è poi quella che ci fa immaginare di poter avere una percezione infinita e un'anima immortale, Perché in fondo è questo che tutti vogliamo sapere, come ben sapeva l'indovino che ai barboni di Miracolo a Milano, per 100 lire, diceva sempre la stessa cosa: "Lei non finisce qui! No no... Chissà dove finirà lei, con quello sguardo. Diventerà una grande persona... Lei non finisce qui!".

2 Ed è in questi fluidi che nasce la turbolenza. ne parlo perché fa capire bene come questa specie di "finzione" di avere un tessuto continuo, permetta di spiegare cose che sarebbe impossibile capire a livello molecolare. Prendete un fluido e fatelo girare, per esempio mischiate dell'acqua con un cucchiaio. Se girate piano non succede nulla. Poi piano piano appaiono dei vortici e se girate ancora più forte, vedrete apparire sempre più vortici, tanti mulinelli, e altri piccoli che vengono in qualche modo attivati da quelli grandi. Ed ecco da dove viene la storia della farfalla che batte le ali in Cina e fa nascere un uragano in America. Ecco da dove viene l'instabilità delle previsioni del tempo. E insomma, quando abbiamo a che fare con questi fluidi su scale cosi grandi, non riusciamo a vederli come un materiale fatto di tante particelle, ma, anche se poi in realtà le simulazioni numeriche che produciamo sono sempre fatte su un numero finito di valori, ci ostiniamo a vederli come continui. Come se esistessero veramente e la realtà fosse solo una buona approssimazione di questa realtà "continua" più profonda .

Domanda mia a De Luca:

- La matematica crea delle strutture immaginarie condivise (anche se da una ristretta cerchia di persone appropriatamente educate, sempre parecchie migliaia in tutto mondo pero'), una conoscenza che cerca di essere veramente globale, e l'infinito fa parte di queste strutture. I concetti matematici hanno una specie di permanenza indipendente dalle singole persone. L'intenzione dell'autore, ciò che lo ha portato a trovare quella cosa, non ha più importanza, e resta un oggetto che posso prendere e manipolare a piacere. Una volta introdotta una nuova idea, chiunque la puo' fare propria e usare. E' vero per l'infinito, per i gruppi finiti o per gli spazi di Banach. Quando uno "impara" a vedere l'infinito, non puo' piu' fare a meno di vederlo. E per questo la matematica cresce e possiamo pensarla come infinita.

Si puo' dire lo stesso dell'immaginario della letteratura? Esiste una cosa al di là della semplice istanza contingente di una certa opera letteraria? La cosa che resiste alle cattive traduzioni, ai cambiamenti culturali e di costume, alle diverse filosofie, alle riduzioni cinematografiche, ai cattivi lettori? È la letteratura, in questo senso, infinita?