Con il passare del tempo, l'evoluzione porterà a un equilibrio, che si può calcolare, e risulta essere una popolazione con una frazione di $\frac{G}{C}$ *falchi...* cerchiamo di capire più nel dettaglio il significato di questa frase.

Per cominciare, ricordiamo che con *Falchi* e *Colombe* si indicano *comportamenti* di diversi individui della stessa specie e nella stessa popolazione, quindi sarebbe più corretto parlare di *Aggressivi contro Pacifici*; il modo classico con il quale si indica il gioco fa comunque riferimento ai due uccelli e così nel seguito sarà chiamato.

Creiamo la *matrice di payoff* di *Falchi contro Colombe* ossia la tabella nella quale riportare i valori di fitness medi che si ottengono dopo ogni scontro,

$$\begin{array}{rcc} & contro & contro \\ & falchi & colombe \\ & \downarrow & \downarrow \\ falchi \rightarrow & \frac{G-C}{2} & G \\ colombe \rightarrow & 0 & \frac{G}{2} \end{array}$$

o in maniera più compatta

$$A = \begin{pmatrix} \frac{G-C}{2} & G \\ 0 & \frac{G}{2} \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con x, numero tra 0 e 1, la frequenza di falchi ($x = 1$ tutti falchi, $x = 0$ tutte colombe) e con y quella delle colombe, lo stato della popolazione è individuato dalla coppia $\begin{pmatrix} x, & y \end{pmatrix}$; quello che ci interessa conoscere è l'evoluzione nel tempo della popolazione per mostrare che verrà raggiunto il valore di equilibrio, per questo x e y dipenderanno dal tempo:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Il modello utilizzato per rappresentare il fenomeno è chiamato *Replicator Dynamics* e funziona bene per popolazioni che occupano un territorio non troppo ampio e su tempi brevi (non tiene conto delle mutazioni, che hanno importanza solo per intervalli temporali più grandi di quelli che ci interessano).

Il *tasso di incremento* dei falchi è indicato da

$$\frac{\dot{x}}{x}$$

rapporto tra la loro variazione nel tempo (la derivata $\dot{x}$) e il loro numero x; il tasso è quantificato dal loro *successo evolutivo*: più il comportamento aggressivo porterà ad avere cibo, più i falchi aumenteranno di numero, a spese delle colombe.

Quale può essere una misura del successo evolutivo? Si può esprimere come la *differenza tra la fitness dei falchi e la fitness media della popolazione*, entrambe legate alla matrice di payoff; la prima ($f(x)$) si calcola moltiplicando il vettore della popolazione e la prima riga della matrice A

$$f(x) = \left[A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]_1$$

ottenendo

$$\left(\frac{G-C}{2} \right) x + Gy$$

misura del *successo assoluto* dei falchi. Allo stesso modo

$$f(y) = \frac{G}{2} y$$

è la fitness delle colombe. Però non basta essere forti *in assoluto* per poter aver successo, bisogna essere *più* forti rispetto al resto della popolazione (in questo ambiente la forza è intesa in senso generale, non solo fisico), per questo al valore $f(x)$ va sottratta la *fitness media della popolazione* $\overline{f}$, ottenuta come media pesata delle fitness di x e y:

$$\overline{f} = x f(x) + y f(y)$$

Quindi

$$Tasso\, di\, incremento\, di\, falchi \; = \; fitness\, dei\, falchi \; - \; fitness\, media$$

in formule

$$\begin{cases} \frac{\dot{x}}{x} = f(x) - \overline{f} \\ \frac{\dot{y}}{y} = f(y) - \overline{f} \end{cases}$$

Questo è un *sistema di equazioni differenziali ordinarie* e può essere ricondotto ad una sola equazione notando che x e y sono frequenze e che la loro somma è la frequenza di tutta la popolazione, ossia $x + y = 1$. Quindi $y = 1 - x$ e, sostituendo nella prima equazione, svolgendo i calcoli, si ottiene

$$\dot{x} = x\left(x - \frac{G}{C}\right)(x - 1)$$

Risolvere questa equazione significa trovare precisamente la legge dell'andamento della frequenza di falchi $x(t)$ ma ci accontentiamo di sapere solo qualitativamente il comportamento, senza entrare nel dettaglio; per farlo si ragiona in questo modo: il termine a sinistra dell'uguale si comporta come una *velocità* (*di variazione dei falchi* in questo caso, ma se x rappresentasse una posizione, $\dot{x}$ sarebbe esattamente la velocità nel senso usuale del termine) ed è uguale al termine a destra; quando quest'ultimo si annulla allora la *velocità di variazione dei falchi* è nulla, la loro frequenza resta uguale nel tempo, la popolazione ha raggiunto un equilibrio. Si nota facilmente che

$$F = x\left(x - \frac{G}{C}\right)(x - 1)$$

si annulla per $x = 0$ e $x = 1$, ossia la popolazione non varia quando non ci sono falchi o non ci sono colombe, come ci si aspetta. C'è anche un altro equilibrio, per $x = \frac{G}{C}$ (compreso tra 0 e 1 perché il costo della lotta C è maggiore del guadagno G), che corrisponde al valore per il quale la fitness dei falchi è uguale a quella delle colombe, diverso dagli altri due in quanto *attrattivo*: se consideriamo un valore di x diverso da un equilibrio si nota (vedi la figura) che la traiettoria verrà *spinta* verso $\frac{G}{C}$, per ogni x iniziale. Qualunque sia la popolazione iniziale, anche con una presenza infinitesima di colombe (o falchi), dopo un tempo sufficientemente lungo si stabilizzerà intorno al valore $\frac{G}{C}$, le equazioni parlano chiaro.

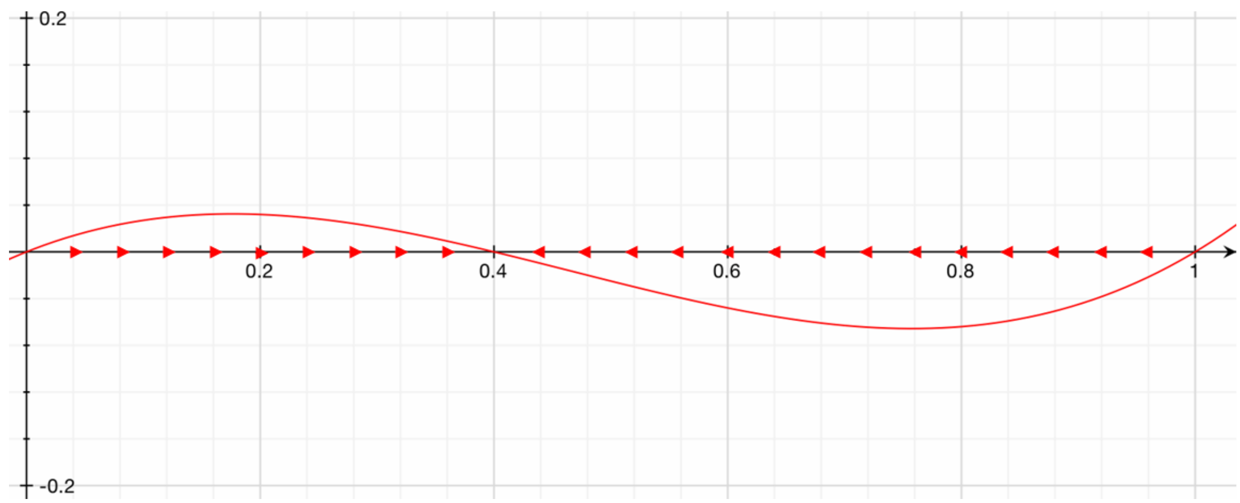

Figura 1: Sulle ascisse è rappresentata x e sulle ordinate il valore di F per $\frac{G}{C} = 0,4$. Dove F è positiva (tra 0 e $\frac{G}{C}$) la velocità è positiva, quindi il numero di falchi cresce (è il significato delle frecce). Dove F è negativa (tra $\frac{G}{C}$ e 1) allora invece il numero decresce. In entrambi i casi, le frecce portano a $\frac{G}{C}$.

Ora torna all'articolo e vai al *15*.