MaddMaths!
MAtematica Divulgazione Didattica

L'evoluzione temporale di una coltura batterica

Viene di seguito proposto un problema di applicazione della matematica alle scienze biologiche, in cui l'obiettivo è la costruzione e lo studio di un modello di crescita di una coltura batterica.

Unità di apprendimento in cui inserire l'attività: esponenziali e logaritmi

Contesto: 4° anno del Liceo Scientifico

Collegamenti interdisciplinari: scienze

Concetti-chiave in lingua inglese: rate of growth, exponential growth model

Competenza: Avere padronanza degli strumenti matematici per la costruzione di modelli

Conoscenze:
- Concetto di funzione
- Immagini e contro-immagini
- Proprietà dei logaritmi
- Tecniche di risoluzione delle equazioni esponenziali e logaritmiche
- Tasso di crescita

Abilità:
- Applicare le proprietà dei logaritmi
- Risolvere equazioni esponenziali e logaritmiche
- Costruire semplici modelli di crescita o di decrescita esponenziale

Problema. *Un biologo sta studiando l'evoluzione temporale di una determinata coltura batterica. All'istante iniziale (t=0) erano presenti 450 batteri e, due ore più tardi, il biologo dispone di 620 batteri. Supponendo che l'andamento della crescita della popolazione batterica in funzione del tempo sia di natura esponenziale, determinare:*

a) il tasso di crescita della coltura;
b) il numero di batteri che il biologo avrà a disposizione dopo 2 giorni;
c) il tempo che il biologo dovrà attendere se vuole ottenere un numero di batteri pari a 1000000.

Risoluzione

Se si indica con $N(t)$ il numero di batteri al tempo *t*, con N_0 il numero di batteri al tempo t=0, con r il tasso di crescita e con t il tempo espresso in ore, il modello di crescita per la coltura batterica può essere scritto come:

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

a) Per determinare il tasso di crescita, è necessario determinare t dalla precedente equazione. Quindi si ha:

$$\ln N(t) = \ln N_0 + rt$$

da cui:

$$\ln N(t) - \ln N_0 = rt$$

e quindi:

$$r = \frac{\ln\left[\frac{N(t)}{N_0}\right]}{t}$$

Sostituendo i dati del testo, si ha:

$$r = \frac{\ln\left[\frac{N(t)}{N_0}\right]}{t} = \frac{\ln\left(\frac{620}{450}\right)}{2} = \frac{\ln 1{,}38}{2} \approx 0{,}16$$

b) Per determinare il numero di batteri che saranno a disposizione del biologo dopo 2 giorni, ossia dopo 48 ore, basta determinare l'immagine di 48 tramite la funzione $N(t)$, cioè:

$$N(48) = 450 \cdot e^{0{,}16 \cdot 48} \approx 985173$$

c) Per rispondere alla terza richiesta, è sufficiente determinare la contro-immagine di 1000000 tramite la funzione $N(t)$, ossia basta risolvere l'equazione:

$$1000000 = 450 \cdot e^{0{,}16t}$$

Quindi:

$$e^{0{,}16t} = 222{,}222$$

per cui:

$$0{,}16t = \ln(222{,}222)$$

ossia:

$$t = 48{,}16\ h$$